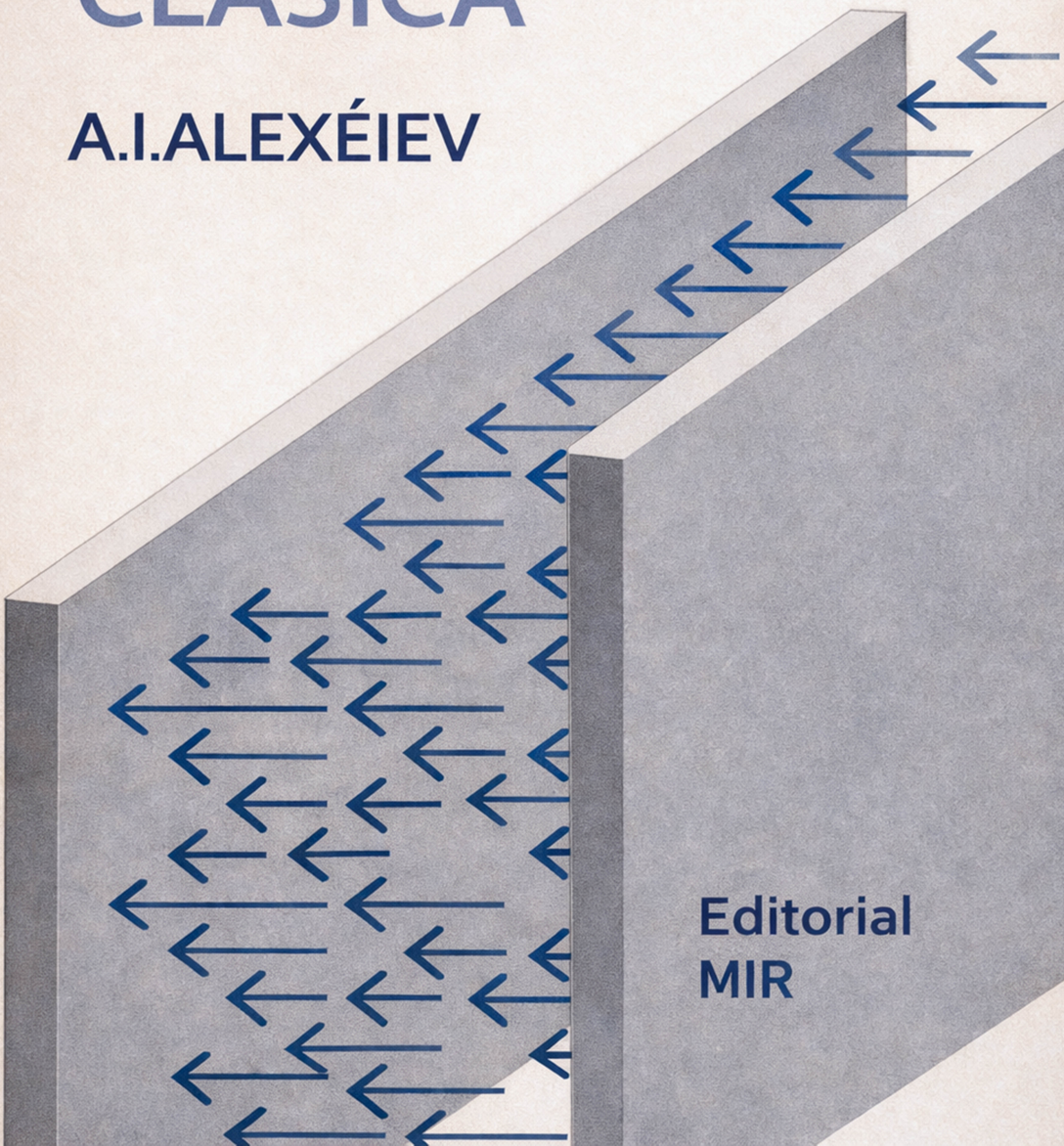
PROBLEMAS de ELECTRO-DINÁMICA CLÁSICA

A.I.ALEXÉIEV



Editorial MIR

A. I. ALEXÉIEV

PROBLEMAS de ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. И. АЛЕКСЕЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕССКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

PROBLEMAS DE ELECTRODINAMICA CLASICA

A. I. ALEXEIEV

EDITORIAL MIR

MOSCU

Traducido del ruso por
el ingeniero Jesús Heranz Castaños

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1980

© Издательство «Наука». 1977
© Traducción al español. Editorial Mir. 1977

INDICE

	Problemas	Respuestas y soluciones
Prefacio	7	
Notaciones adoptadas	9	
Capítulo I. Campo eléctrico constante	13	153
§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en electrostática	21	153
§ 2. Teorema electrostático de Gauss . .	23	154
§ 3. Aplicación de la solución general de la ecuación de Poisson	26	157
§ 4. Fuerza y energía en electrostática .	28	161
§ 5. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias	30	163
§ 6. Densidad de carga en cuerpos de diferente configuración	34	177
§ 7. Momento dipolar	36	179
§ 8. Tensor del momento cuadripolar . .	38	181
§ 9. El campo a grandes distancias de un sistema cargado	43	185
§ 10. Capa eléctrica doble	46	187
Capítulo II. Campo magnético constante . . .	48	188
§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en magnetostática . . .	54	188
§ 2. Momento magnético	57	191
§ 3. Campo magnético a grandes distancias de la corriente	59	194
§ 4. Ley de Biot—Savart	60	194
§ 5. Teorema sobre la circulación de la intensidad del campo magnético	64	197
§ 6. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias	68	201
§ 7. Energía del campo magnético . . .	71	208

	Problemas	Respuestas y soluciones
Capítulo III. Campo electromagnético variable	73	210
§ 1. Ecuaciones de Maxwell	79	210
§ 2. Densidad de carga y de corriente	80	212
§ 3. Momentos magnético, dipolar y cuadripolar de cargas en movimiento	82	212
§ 4. Ondas electromagnéticas	84	215
§ 5. Difracción	88	219
Capítulo IV. Radiación de ondas electromagnéticas por cargas en movimiento lento	90	225
§ 1. Radiación dipolar	99	225
§ 2. Radiación dipolar magnética y cuadripolar	104	234
§ 3. Descomposición espectral de la radiación	112	243
§ 4. Distribución angular de la radiación	118	253
§ 5. Polarización de las ondas radiadas.	121	259
§ 6. Dispersión de las ondas electromagnéticas	123	263
§ 7. Radiación de manantiales extendidos	125	266
§ 8. Problemas que requieren cálculos en computadoras	127	271
Capítulo V. Campo de partículas relativistas cargadas	132	285
§ 1. Transformación del campo electromagnético	145	285
§ 2. Radiación emitida por una carga en movimiento rápido	148	289
Suplementos		
1. Fórmulas fundamentales del análisis vectorial	299	
2. Matrices y tensores	304	
3. Función delta	309	
4. Polinomios de Legendre	318	
5. Funciones esféricas	315	
6. Funciones cilíndricas	317	
7. Cálculo tensorial en el espacio seudoeuclidiano	322	
Bibliografía	332	

PREFACIO

La presente recopilación abarca una serie de problemas sobre la electrodinámica clásica que el autor ha utilizado durante muchos años en el Instituto de Ingeniería y Física de Moscú para las clases prácticas, así como en calidad de tareas individuales para los estudiantes. La mayoría de los problemas son originales. Además, en el libro se ha incluido también una serie de problemas modelos con el fin de ilustrar la metodología que se aplica. Los problemas son de distinto grado de complicación, no obstante, la mayoría de ellos está al alcance de todo aquel que ha estudiado la teoría del campo electromagnético.

Para muchos problemas se da la solución detallada, sobre todo en aquellos casos cuando se aplican nuevas ideas y métodos en comparación con el material anterior. Al mismo tiempo la obra contiene, en correspondencia con las diferentes partes del curso de electrodinámica, numerosos problemas similares, para los cuales se ofrecen sólo las soluciones y breves orientaciones. Tales problemas son útiles para confeccionar trabajos de control y tareas individuales, así como para el autocontrol cuando se estudia la electrodinámica. Si aparecen dificultades al resolver estos problemas, esto muestra que la correspondiente parte del curso de dicha asignatura no ha sido lo suficiente asimilada y requiere un estudio suplementario más profundo.

Por su contenido el libro abarca cuestiones de la electrodinámica en el vacío. Se han introducido, además de la densidad espacial, nociones sobre densidades superficial y lineal de carga, así como densidad superficial de corriente. Todo esto ha permitido ampliar considerablemente el círculo de cuestiones que se examinan y dar la posibilidad de ilustrar los diversos métodos que se aplican, tanto en la electrodiná-

mica en el vacío, como en la electrodinámica en medios densos.

Cada capítulo está precedido por una breve introducción teórica, mientras que en los suplementos se resumen conocimientos imprescindibles sobre análisis vectorial, cálculo tensorial y funciones especiales. Las fórmulas que se dan sirven como material de consulta a fin de economizar tiempo al lector que resuelve los problemas. Todo esto ha permitido reducir el volumen de la recopilación al presentar las soluciones de algunos problemas.

Alexéiev A. I.

NOTACIONES ADOPTADAS

En todas las partes se utiliza el sistema absoluto de unidades eléctricas de Gauss.

Los vectores se designan con caracteres semigruesos, mientras que sus módulos son caracteres claros. La descomposición del vector **A** en los versores $\mathbf{l}_x$, $\mathbf{l}_y$, $\mathbf{l}_z$ del sistema de coordenadas cartesiano puede escribirse de dos formas

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{l}_x + A_y\mathbf{l}_y + A_z\mathbf{l}_z = A_1\mathbf{l}_x + A_2\mathbf{l}_y + A_3\mathbf{l}_z.$$

Si el subíndice del vector o tensor está designado con letras griegas y se repite dos veces en una misma expresión, éste indica que se supone la suma entre 1 y 3. En este caso el símbolo de la suma $\sum$ se suprime. Por ejemplo,

$$a_\alpha b_\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Si los subíndices mencionados se designan con caracteres latinos, la suma se efectúa del 1 al 4:

$$a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

Las integrales de cualquier orden se designan con un solo símbolo $\int$ y se distinguen únicamente indicando el elemento de integración: $dV = dx\,dy\,dz = d\mathbf{r}$ — elemento de volumen, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$ — elemento de superficie y $d\mathbf{l} = \tau\,dl$ — elemento de un contorno orientado. En este caso $\mathbf{n}$ es el versor perpendicular a la superficie de integración y τ el versor tangente al contorno de integración. El símbolo $\oint$ representa la integral a lo largo de una superficie cerrada con un versor perpendicular exterior $\mathbf{n}$ o de un contorno orientado cerrado, cuya dirección de trayectoria la señala el versor τ. Los límites de integración en una integral defi-

nida a veces se suprimen absolutamente. En este caso la integración se efectúa para la región donde la función subintegral se diferencia de cero.

Para el desarrollo en serie de Fourier se ha adoptado la expresión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

o en un espacio tridimensional

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k},$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \int \varphi(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}.$$

La función $f(t)$ es periódica con un período $T = \frac{\pi 2}{\omega_0}$ y se desarrolla en serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, e^{\cdot\, in\omega_0 t},$$

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega_0 t}\, dt.$$

La derivada total con relación al tiempo a menudo se designa con un punto inscrito encima de la función $\frac{dF}{dt} = \dot{F}$. La derivada de la función $\Phi(x)$ en el punto $x = x_0$ se expresa como $\frac{d\Phi(x_0)}{dx}$.

El subíndice 0 a la derecha de cada símbolo significa que la magnitud es constante respecto al tiempo y a las coordenadas.

Si el argumento de la función se expresa como αt, $\mathbf{kr}$ o βr, los factores α, $\mathbf{k}$ y β no dependen de las coordenadas y del tiempo.

$\mathbf{A}$ — potencial vectorial

c — 1) constante electrodinámica, equivalente a la velocidad de propagación de la luz en el vacío;

2) constante arbitraria; 3) semieje de elipsoide

$\mathbf{d}$ — momento dipolar

$D_{\alpha\beta}$ — componentes del tensor del momento cuadripolar

e — carga puntual (carga de la partícula)

$\mathbf{E}$ — intensidad del campo eléctrico

$\mathscr{E}$ — 1) energía; 2) energía cinética de una partícula no relativista

$\mathbf{F}$ — fuerza

$\mathbf{g}$ — densidad de impulso del campo electromagnético

$\hbar$ — constante de Planck $1{,}054 \cdot 10^{-27}$ erg/s

$\mathbf{H}$ — intensidad del campo magnético

$\mathbf{i}$ — densidad superficial de la corriente

I — intensidad de radiación

$\mathbf{j}$ — densidad espacial de la corriente

J — 1) intensidad de la corriente; 2) momento de inercia

$\mathbf{k}$ — 1) vector de onda; 2) vector variable de desarrollo de la integral triple de Fourier

l — dimensión lineal de un sistema con carga o de una región del espacio

L — 1) contorno de integración de una integral curvilínea; 2) longitud

m — masa

$\mathbf{M}$ — momento de impulso (momento mecánico)

$\mathbf{N}$ — 1) momento de fuerzas; 2) vector unitario

$\mathbf{n}$ — 1) versor perpendicular a la superficie (de la normal exterior para una superficie cerrada); 2) versor del radio vector (vector posición) $\mathbf{r}$ que define el punto de observación; 3) vector unitario

$\mathbf{p}$ — impulso

$\mathbf{P}$ — impulso total del sistema mecánico

q — densidad lineal de carga

Q — carga total

R — radio de una circunferencia, cilindro o esfera

r — 1) módulo del radio vector $\mathbf{r}$; 2) coordenada esférica; 3) coordenada cilíndrica

S — superficie

$\mathbf{s}$ — vector de Poynting

t — tiempo

T — 1) período; 2) energía cinética de una partícula relativista

$T_{\alpha\beta}$ — tensor maxweliano de tensión

U — energía potencial
$\mathbf{v}$ — velocidad
V — volumen
W — 1) energía del campo electromagnético; 2) energía magnética de interacción entre la corriente y el campo magnético exterior
w — densidad de energía del campo electromagnético
$x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ — componentes del radio vector $\mathbf{r}$ en coordenadas rectangulares cartesianas
θ — ángulo polar en el sistema de coordenadas esféricas
λ — longitud de onda dividida por 2π
μ — momento magnético
μ — masa reducida
ρ — densidad espacial de carga
σ — densidad superficial de carga
τ — 1) versor tangente a la superficie o al contorno orientado; 2) densidad del momento dipolar de la capa eléctrica doble
φ — potencial escalar
ψ — 1) ángulo azimutal en el sistema de coordenadas esféricas; 2) ángulo polar en el sistema de coordenadas cilíndricas; 3) ángulo entre dos direcciones.
ω — 1) frecuencia cíclica; 2) velocidad angular de rotación
Ω — 1) ángulo sólido; 2) frecuencia cíclica
∇ — operador nabla

PROBLEMAS

Capítulo I CAMPO ELÉCTRICO CONSTANTE

La magnitud que fundamentalmente caracteriza un campo eléctrico en el vacío es el vector de intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ de dicho campo. Este vector $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ representa la fuerza que actúa sobre una carga de prueba unitaria ubicada en un punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}$.

En este capítulo se examina el campo electrostático formado por cargas en reposo. La distribución de éstas en el espacio se especifica por la densidad espacial $\rho(\mathbf{r})$, en superficies cargadas por la densidad superficial $\sigma(\mathbf{r})$ y en contornos lineales, por la densidad lineal $q(\mathbf{r})$. Una superficie cargada se examina como el límite de una superficie de finito espesor que sin restricción disminuye a condición de que no varíe la carga σ en unidad de la misma. Análogamente un contorno lineal cargado (o simplemente carga lineal) es el límite de un cilindro largo y cargado, cuya sección disminuye sin limitaciones a condición de que no varíe la carga q en la unidad de longitud. Las configuraciones de las superficies con cargas y contornos de carga lineal son arbitrarias. Además, en el espacio pueden hallarse cargas puntuales aisladas e_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

La intensidad del campo electrostático satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \tag{I.1}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{I.2}$$

Si las cargas están concentradas en una región finita, la intensidad del campo electrostático a grandes distancias r del sistema cargado disminuye inversamente al cuadrado de la distancia $1/r^2$ o con mayor rapidez. Esta afirmación es una condición suplementaria a las ecuaciones de Maxwell (I.1) y (I.2) cuando se busca $\mathbf{E}$ en un espacio ilimitado.

La componente perpendicular de la intensidad del campo eléctrico $E_n = E_n$ al cruzar una superficie cargada sufre un salto

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{I.3}$$

mientras que la componente tangencial es continua

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \tag{I.4}$$

Aquí los subíndices 1 y 2 señalan la intensidad del campo eléctrico en las regiones primera y segunda que se encuentran a distintos lados de la superficie cargada. El vector unitario $\mathbf{n}$, perpendicular a esta superficie, está orientado de la primera región a la segunda. Las relaciones (I.3) y (I.4) son en electrostática las condiciones de frontera.

La parte derecha de la ecuación de Maxwell (I.2) está por lo general integrada por la densidad espacial de carga ρ continua localmente, mientras que la densidad superficial σ se considera en condiciones de frontera.

Existe también otro enfoque para resolver problemas que no requiere formular las condiciones de frontera. La distribución superficial de la carga σ (r) se toma en consideración con la densidad volumétrica ρ (r) por medio de la δ-función, y la solución de la ecuación de Maxwell se busca a la vez en todo el espacio. Desde el punto de vista de las matemáticas esta forma de resolver es menos cómoda ya que la parte derecha de la ecuación (I.2) se convierte en una función singular tendente al infinito en los puntos de las superficies cargadas.

Para las intensidades del campo eléctrico es correcto el teorema electrostático de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 4\pi Q, \tag{I.5}$$

donde Q es la carga total que se encuentra dentro de una superficie cerrada S y que generalmente se compone de cargas espaciales, superficiales, lineales y puntuales.

El campo electrostático se caracteriza, tanto por la intensidad E, como por el potencial φ, expresado por la relación

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\ \varphi. \tag{I.6}$$

La diferencia de potenciales entre dos (primero y segundo) puntos del espacio representa de por sí el trabajo que es

necesario realizar contra las fuerzas del campo eléctrico para trasladar una carga unitaria de un punto del espacio a otro (del segundo al primero).

El potencial φ satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \tag{I.7}$$

así como las condiciones de frontera en las superficies que separan las regiones

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_c} = 4\pi\sigma, \tag{I.8}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{I.9}$$

La ecuación (I.7) se denomina ecuación de Laplace cuando la parte derecha es nula. Al resolver las ecuaciones de Poisson y Laplace no hay que olvidar que en todos los puntos del espacio donde la densidad de carga es limitada el potencial es una función continua. Además, el potencial es continuo también cuando pasa por una superficie cargada, si la densidad espacial de carga en dicho punto es limitada. La condición de frontera en un contorno lineal, cargado con una densidad lineal q, en caso de $r \to 0$, se escribe de la siguiente forma $\varphi = -2q \ln r + \text{const}$, donde r es la menor distancia entre el punto de observación y el contorno que se examina. Cuando las cargas se encuentran en una región finita del espacio, el potencial, a una distancia infinita de estas cargas, resulta igual a cero. La intensidad del campo eléctrico se determina calculando el gradiente (I.6) del potencial hallado.

Por el contrario, si el vector E ha sido determinado a partir del teorema electrostático de Gauss (I.5) o de cualquiera otra forma, el potencial φ del campo eléctrico se halla de la relación (I.6), que se examina como una ecuación diferencial respecto a la función que se busca φ.

A menudo, en los problemas de electrodinámica se investiga el campo eléctrico de fuentes con extensiones infinitas, aunque realmente los sistemas cargados siempre poseen dimensiones limitadas. Los resultados que se obtienen en estos casos tienen interés práctico ya que el campo de dichas fuentes describe correctamente el campo eléctrico de los correspondientes sistemas cargados finitos a distancias pequeñas en comparación con las dimensiones lineales de estos sistemas reales. Por ejemplo, el campo eléctrico de un

cilindro cargado de longitud infinita coincide con gran exactitud con el campo de otro cilindro semejante, bastante grande, pero de longitud finita, siempre que el punto de observación diste poco del mismo en comparación con su longitud. La diferencia entre los campos mencionados se observa cerca de los extremos del cilindro, así como a unas distancias de éste comparables con su longitud.

El potencial o intensidad del campo electrostático de una carga puntual e

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{I.10}$$

donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los radios vectores correspondientes al punto de observación y al punto donde se encuentra la carga (ley de Coulomb).

En la electrostática es válido el principio de superposición: un campo electrostático compuesto por un sistema de varias cargas representa de por sí la suma de los campos originados por cada carga aislada. O expresado de otra manera, la carga en presencia de otros sistemas cargados engendra el mismo campo que en el vacío.

Si las cargas están distribuidas con una densidad espacial $\rho(\mathbf{r}')$, según la ley de Coulomb para una carga puntual elemental $\rho(\mathbf{r}')\,dV'$ y acorde con el principio de superposición, el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ y la intensidad $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ del campo eléctrico en el punto de observación cuyo radio vector es $\mathbf{r}$, pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{I.11}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{I.12}$$

El potencial (I.11) satisface la ecuación de Poisson (I.7) y es la solución general para un espacio ilimitado si la integral triple es convergente. En este caso se observan automáticamente las condiciones de frontera (I.8) y (I.9) en la superficie que separa las cargas y el vacío. Si la integral (I.11) es divergente o no se puede calcular analíticamente, el potencial del campo electrostático se determina resolviendo la ecuación de Poisson (I.7) teniendo en cuenta las condiciones de frontera (I.8) y (I.9).

A veces en el espacio en lugar de cargas espaciales existen superficies cargadas y contornos lineales. En este caso

el potencial se calcula por medio de la fórmula

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\, dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int \frac{q(\mathbf{r}')\, dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (I.13)$$

mientras que la intensidad del campo eléctrico se determina conforme a la relación (I.6).

A causa de que el cálculo directo de las integrales (I.11) y (I.13), por regla general, resulta bastante difícil, para determinar el campo electrostático que dista mucho del sistema cargado se ha elaborado una metodología de cálculo de dichas integrales con cualquier grado de precisión. Esta consiste en desarrollar la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en serie respecto al parámetro menor $\frac{x'_\alpha}{r}$, donde los radios vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ se toman en un sistema de coordenadas cuyo origen está dentro del sistema cargado y que tiene las máximas dimensiones lineales l. Como resultado el potencial puede representarse, a grandes distancias $r \gg l$ del sistema cargado, en forma de serie infinita que converge con rapidez

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{dr}}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} + \ldots, \qquad (I.14)$$

donde para la distribución de la carga con una densidad espacial $\rho(\mathbf{r})$ se introducen las siguientes notaciones:

$$Q = \int \rho(\mathbf{r})\, dV, \qquad (I.15)$$

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\, dV, \qquad (I.16)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, \rho(\mathbf{r})\, dV, \qquad (I.17)$$

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{l}_x + x_2\mathbf{l}_y + x_3\mathbf{l}_z. \qquad (I.18)$$

Las magnitudes (I.15), (I.16) y (I.17) se denominan respectivamente, carga total, momento dipolar y tensor del momento cuadripolar de un sistema con carga. Las últimas caracterizan el grado de desivación de la simetría central en la distribución de la carga del sistema. En un sistema cargado, esférico y simétrico las magnitudes (I.16) y (I.17), así como los momentos multipolares de grado superior, son nulos, mientras que el potencial en los puntos exteriores es coulombiano $\varphi = Q/r$, siendo r la distancia entre el centro de simetría del sistema y el punto de observación.

Si las cargas se distribuyen por la superficie con una densidad superficial σ, entonces la carga total, el momento dipolar y el tensor del momento cuadripolar se expresan respectivamente por las integrales (I.15) . . . (I.17), en las cuales se ha reemplazado $\rho\, dV \to \sigma\, dS$, y la integración se realiza con relación a la superficie cargada. De la misma manera se procede para el contorno lineal, cargado con una densidad lineal q, en las integrales (I.15) . . . (I.17) se reemplaza $\rho\, dV \to q\, dl$, y la integración se efectúa respecto al contorno cargado.

En caso de cargas e_i, ubicadas en puntos con radio vector $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, la densidad espacial de carga se expresa mediante la δ-función (función delta de Dirac):

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{I.19}$$

y las magnitudes (I.16) y (I.17) toman el aspecto

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \tag{I.20}$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}). \tag{I.21}$$

Para un cuerpo de revolución cargado uniformemente el tensor del momento cuadripolar se representa de la manera más simple en el sistema de coordenadas cartesiano, donde uno de sus ejes coincide con el eje de simetría axial. En este caso sólo las componentes diagonales del tensor $D_{\alpha\beta}$ difieren de cero. Por ejemplo, si el eje Z se elige a lo largo del eje de simetría de dicho cuerpo, entonces las componentes del tensor que se diferencian de cero son iguales a

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{2} D_{33}. \tag{I.22}$$

La magnitud $D_{33} \equiv D$ se denomina momento cuadripolar del cuerpo de revolución.

Por analogía con el caso de cargas puntuales (I.19) existe la posibilidad de introducir por medio de la δ-función, la noción de densidad espacial ρ, también para el caso que se dé la distribución superficial o lineal de la carga. Después de esto pueden utilizarse las fórmulas obtenidas anteriormente para la distribución de la carga con densidad espacial $\rho(\mathbf{r})$.

El sistema de dos láminas paralelas e infinitamente cercanas, cuyas densidades superficiales de carga en las zonas opuestas son equivalentes en términos de sus valores absolutos, pero de signos opuestos se denomina capa eléctrica doble. Esta se caracteriza por la densidad del momento dipolar τ. En cada punto de la superficie de la capa doble el vector τ es paralelo a la normal $\mathbf{n}$ y está orientado de lado negativo al positivo. En el caso de que estas superficies se aproximen ilimitadamente, el valor absoluto de la densidad superficial de carga en las zonas opuestas aumenta hasta tal punto que la densidad del momento dipolar τ alcanza un valor finito. El elemento de la superficie $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ de la capa eléctrica doble posee un momento dipolar eléctrico $d\mathbf{d} = \tau\, dS = \tau\, d\mathbf{S}$.

El potencial de la capa eléctrica doble en el punto de observación con radio vector $\mathbf{r}$ se define de la siguiente manera:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dS', \qquad \text{(I.23)}$$

donde $\tau(\mathbf{r}')$ es la densidad del momento dipolar en el punto con radio vector $\mathbf{r}'$ en la superficie de la capa eléctrica doble.

Cuando el valor absoluto de la densidad del momento dipolar es constante, la capa se denomina homogénea y la fórmula (I.23) se simplifica

$$\varphi = \tau\Omega. \qquad \text{(I.24)}$$

Aquí Ω es el ángulo sólido bajo el cual se ve desde el punto de observación la superficie con carga positiva de la capa eléctrica doble. Si se observa la superficie con carga negativa delante del segundo miembro de la fórmula (I.24) se pone el signo menos.

El potencial e intensidad del campo eléctrico en la superficie de la capa eléctrica doble satisfacen las condiciones de frontera

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau, \qquad \text{(I.25)}$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 0, \qquad \text{(I.26)}$$

donde los subíndices 1 y 2 especifican las magnitudes tomadas en las superficies negativa y positiva de la capa.

El valor del potencial $\varphi_0(\mathbf{r}')$ en un punto arbitrario que se encuentra sobre la propia superficie de la capa doble está vinculado con la densidad $\tau(\mathbf{r}')$ del momento dipolar

en este mismo punto mediante las siguientes proporciones:

$$\varphi_1(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') - 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \tag{I.27}$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') + 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \tag{I.28}$$

siendo $\varphi_1(\mathbf{r}')$ y $\varphi_2(\mathbf{r}')$ los valores límites del potencial al aproximarse a la capa doble correspondientemente por los lados negativo y positivo. Estos valores figuran dentro de la condición de frontera (I.25).

La energía del campo electrostático

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2\, dV. \tag{I.29}$$

Si en un espacio ilimitado esta integral converge, resulta más conveniente calcular la energía (I.29) utilizando la fórmula equivalente

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \tag{I.30}$$

La energía electrostática de interacción entre dos sistemas cargados con densidades espaciales $\rho_1(\mathbf{r})$ y $\rho_2(\mathbf{r}')$ se calcula por medio de la fórmula

$$U = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\,\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV\, dV', \tag{I.31}$$

La energía potencial de un sistema de cargas con densidad espacial $\rho(\mathbf{r})$ distribuidas en un campo eléctrico exterior con potencial $\varphi(\mathbf{r})$, se determina a partir de la expresión

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\, dV. \tag{I.32}$$

Si el potencial del campo eléctrico exterior $\varphi(\mathbf{r})$ varía poco a lo largo del sistema cargado, la expresión (I.32) se sustituye por una serie que converge rápidamente

$$U = Q\varphi(\mathbf{R}) - \mathbf{dE}(\mathbf{R}) + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{R})}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \ldots \tag{I.33}$$

Aquí el potencial y la intensidad del campo eléctrico exterior, lo mismo que las derivadas del potencial, se eligen en un punto de radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, dentro del sistema cargado que se examina. Este punto interior sirve de origen para el sistema de coordenadas cartesiano en el cual están determinadas las magnitudes d y $D_{\alpha\beta}$.

La fuerza **F** y el momento **N** de fuerzas, aplicadas al sistema cargado en el campo eléctrico exterior con intensidad **E**, es igual

$$\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV, \tag{I.34}$$

$$\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E})\, \rho\, dV. \tag{I.35}$$

En el caso particular de un dipolo cuyo momento es **d**, las proporciones (I.34) y (I.35) toman el aspecto

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\ \mathrm{grad})\ \mathbf{E} = \mathrm{grad}\ (\mathbf{dE}), \tag{I.36}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \tag{I.37}$$

Con ayuda del tensor maxwelliano de tensión

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \tag{I.38}$$

la fuerza espacial electrostática (I.34) puede reemplazarse por un sistema de fuerzas superficiales aplicadas a la superficie del volumen V, en cuyo interior está distribuida una carga de densidad espacial ρ. En este caso la componente F_α de la fuerza total (I.34) se escribirá de la siguiente manera

$$F_\alpha = \int_V \rho E_\alpha\, dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta\, dS, \tag{I.39}$$

donde **n** es el versor de la perpendicular exterior a la superficie cerrada S que limita el volumen V. (Para más detalles véanse, por ejemplo, los manuales [1—3]. Los conocimientos y problemas necesarios sobre la electrodinámica de los medios densos pueden encontrarse en los libros [4—6].)

§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en electrostática

1. Hallar la intensidad **E** del campo eléctrico cuyo potencial φ sea igual a: a) **a** (**b** × **r**); b) (**a** × **r**) (**k** × **r**); c) (**ar**) cos **kr**; d) $\mathbf{dr}/r^3$; e) $f(r)\, F(r)$; f) $F(f(\mathbf{ar}))$. Aquí los vectores **a**, **b**, **k**, **d** no dependen de las coordenadas y del tiempo, mientras que f y F son funciones diferenciables arbitrarias de su argumento.

2. ¿Podrá engendrarse en el espacio un campo electrostático con una intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, siendo **a** un vector constante?

3. ¿Podrá elegirse una distribución de carga fuera de una región vacía de tal manera que dentro de la misma la intensidad E del campo electrostático adquiera la forma de: a) $\mathbf{E}_0$; b) (br) a; c) (ab) r; d) (a × (b × r); e) (ar) (k × r); f) (r × (c × r)); g) a (br) cos kr; *h*) $\mathbf{E} = E_r\mathbf{l}_r + E_\theta\mathbf{l}_\theta + E_\psi\mathbf{l}_\psi$, siendo las componentes del vector E en coordenadas esféricas

$$E_r = \frac{(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\,R^4}{r^4}\,(3\cos^2\theta - 1),$$

$$E_\theta = \frac{(\mathbf{E}_0\mathbf{b})\,R^4}{r^4}\,\operatorname{sen} 2\theta$$

y $E_\psi = 0$ para $r > R$; i) $\mathbf{E} = E_r\mathbf{l}_r + E_\psi\mathbf{l}_\psi + E_z\mathbf{l}_z$, siendo las componentes del vector E en coordenadas cilíndricas

$$E_r = (\mathbf{E}_0\mathbf{b})\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\psi, \quad E_\psi = (\mathbf{E}_0\mathbf{b})\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)\operatorname{sen}\psi$$

y $E_z = 0$ para $r > R$? En este caso los vectores **a**, **b**, **c**, **k**, $\mathbf{E}_0$ no dependen de las coordenadas.

4. Determinar cómo se distribuye la densidad espacial ρ de una carga, si ésta crea en el espacio un campo eléctrico de intensidad E equivalente a: a) (br) b; b) *g*rr;

$$\text{c) } \frac{e\mathbf{r}}{r^3}\left\{1 - \left[1 + \frac{2r}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right]\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right\};$$

d) $E_r\mathbf{l}_r + E_\theta\mathbf{l}_\theta + E_\psi\mathbf{l}_\psi$, siendo las componentes del vector **E** en coordenadas esféricas $E_r = 2\pi\rho_0\left(r - \frac{2}{3}R\right)\cos\theta$, $E_\theta = \pi\rho_0\left(\frac{4}{3}R - r\right)\operatorname{sen}\theta$, $E_\psi = 0$ para $r \leqslant R$ y $E_r = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R^4 \times \frac{\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^4\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}$, $E_\psi = 0$ para $r \geqslant R$; e) $E_r\mathbf{l}_r + E_\psi\mathbf{l}_\psi + E_z\mathbf{l}_z$, siendo las componentes del vector E en coordenadas cilíndricas $E_r = \frac{4\pi}{3}\rho_0(2r - R)\cos\psi$, $E_\psi = \frac{4\pi}{3}\rho_0(R - r)\operatorname{sen}\psi$, $E_z = 0$ para $r \leqslant R$ y $E_r = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R \times \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\psi$, $E_\psi = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)\operatorname{sen}\psi$, $E_z = 0$ para $r \geqslant R$.

Aquí las magnitudes *a*, *g*, *R*, ρ_0, *e* y el vector **b** no dependen de las coordenadas.

5. Calculando el rotacional y la divergencia de la intensidad E del campo eléctrico, es menester cerciorarse de que en el caso de la electrostática la expresión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, dV'$$

satisface las ecuaciones de Maxwell. Aquí $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad espacial de carga en un punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}'$.

6. La intensidad del campo eléctrico dentro de cierta región del espacio es homogénea. ¿Poseerán los puntos interiores de esta región algunas cargas que participen en la creación de dicho campo eléctrico?

7. Demostrar que en electrostática la integral $\int_a^b \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$, calculada entre dos puntos arbitrarios del espacio no depende de la configuración del contorno de integración.

8. Determinar cómo se distribuye la densidad de una carga σ, si la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico tiene forma de: a) $E_x = E_y = 0$, $E_z = E_0$ para $z > 0$ y $E_x = E_y = 0$, $E_z = -E_0$ para $z < 0$; b) $\mathbf{E} = 0$ para $r < R$ y $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$ para $r > R$, donde r es la distancia hasta el origen de coordenadas, mientras Q y R son constantes; c) $\mathbf{E} = 0$ para $r < R$ y $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^2$ para $r > R$, siendo r la distancia hasta el eje Z, mientras q y R son constantes.

§[2.5] Teorema electrostático de Gauss

9. Una región del espacio está repleta de una carga homogénea de densidad espacial ρ. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ y el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio si la región mencionada es: a) una esfera de radio R; b) un cilindro infinito de radio R; c) una placa ilimitada de espesor $2L$.

10. Una superficie está uniformemente cargada con una densidad superficial σ. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ y el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio si la mencionada superficie tiene forma de: a) una esfera de radio R; b) una superficie cilíndrica infinita de radio R; c) un plano.

11. Una esfera de radio R tiene una carga esférico-simétrica de densidad espacial $\rho = ar^5$, donde a es constante. ¿A que equivale el flujo Φ de la intensidad del campo

eléctrico que pasa a través de un círculo de radio R, cuya superficie en su punto central es tangente a la esfera?

12. En la nube electrónica del atómo de hidrógeno la la densidad media de la carga equivale a $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \times \exp\left(\frac{2r}{a}\right)$ siendo a el radio de Bohr y r la distancia hasta el protón con carga e. Determinar la intensidad E del campo eléctrico en el átomo de hidrógeno. Investigar E a pequeñas $r \ll a$ y grandes $r \gg a$ distancias del protón.

13. El espacio entre dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$ está repleto con una carga esférico-simétrica de densidad espacial $\rho = \rho(r)$, siendo r la distancia hasta el centro común de las dos esferas. Hallar la intensidad E y el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

14. La densidad espacial de carga de un cilindro infinito tiene simetría axial y es equivalente a $\rho = \rho(r)$. Hallar la intensidad E y el potencial φ del campo eléctrico dentro del cilindro. Al calibrar φ es necesario admitir que el potencial en la superficie del cilindro es nulo.

15. Una placa ilimitada está cargada simétricamente respecto a su plano medio $x = 0$. La densidad espacial de carga es igual a $\rho = \rho(|x|)$. Hallar la intensidad E y el potencial φ del campo eléctrico en el interior de la placa. Al calibrar φ hay que aceptar que el potencial en los puntos del plano medio es nulo.

16. Unas cargas puntuales opuestas e_1 y e_2 $(e_1 > |e_2|)$ están situadas en el eje X a cierta distancia una de otra. El eje X está orientado de la carga positiva a la negativa. ¿En qué ángulo θ_2 respecto al eje X entra en la carga e_2 la línea de fuerza que sale de la carga e_1 formando un ángulo θ_1? ¿Bajo qué ángulo θ_0 parte de la carga e_1 la primera línea de fuerza, que por el plano XY se aleja al infinito? ¿Qué ángulo θ_∞ con el eje X forma ésta en el infinito?

17. Dos hilos infinitos homogéneos con cargas opuestas están tendidos en el plano XZ paralelamente al eje Z. Las densidades lineales de carga en los hilos positivo y negativo son respectivamente equivalentes a q_1 y q_2 $(q_1 > |q_2|)$. El eje X está orientado del hilo positivo al negativo. ¿En qué ángulo ψ_1 respecto al eje X parte del hilo positivo la línea de fuerza que penetra en el hilo negativo formando un ángulo ψ_2? ¿Bajo qué ángulo ψ_0 con relación al eje X

parte del hilo positivo la primera línea de fuerza que por el plano XY se aleja al infinito?

18. La carga e_1 se encuentra en el eje X en el punto $x_1 = l$. Determinar el valor de la carga e_2 la cual deberá situarse en el punto $x_2 = -\sqrt{3}l$ del eje X para que el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de la circunferencia $x = 0$, $y^2 + z^2 = l^2$ sea nulo.

19. Sea dada la intensidad del campo eléctrico en el espacio

$$\mathbf{E} = \frac{er}{r^3}(1 + br)\exp(-br),$$

donde e y b son constantes positivas y r la distancia hasta el origen de coordenadas. Determinar cómo se distribuye la densidad espacial ρ de la carga que ha engendrado este campo. ¿A qué equivale la carga total Q?

20. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ y potencial φ del campo eléctrico de dos hilos paralelos e infinitos y uniformemente cargados con una densidad lineal q y $-q$ respectivamente. Los hilos distan entre sí l. Investigar $\mathbf{E}$ y φ a grandes distancias de los hilos. Al calibrar φ es necesario admitir que el potencial a una distancia infinita de los hilos es nulo.

21. Tres planos perpendiculares entre sí están uniformemente cargados con una densidad superficial σ. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

22. En el interior de la esfera hay situada excéntricamente una cavidad esférica, la primera está cargada uniformemente en todo el volumen con una densidad ρ. La distancia entre los centros de la esfera y la cavidad es igual a l. Determinar la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en los puntos de la cavidad esférica.

23. Dentro de un cilindro infinito con una carga homogénea de densidad espacial ρ, hay una cavidad cilíndrica. La distancia entre los ejes paralelos del cilindro y la cavidad es igual a l. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en el interior de la cavidad.

24. Una placa ilimitada fina, uniformemente cargada con una densidad superficial σ, está dividida en dos mitades por una rendija de un ancho a. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico a grandes distancias de la rendija $r \gg a$, teniendo en cuenta los términos de orden $1/r$.

§ 3. Aplicación de la solución general de la ecuación de Poisson

25. Determinar el potencial φ e intensidad E de un campo eléctrico en el eje de un disco fino de radio R, que tiene una carga uniforme con una densidad superficial σ. Convencerse de que el potencial hallado coincide, a una distancia considerable del disco, con el de Coulomb, mientras que la intensidad del campo eléctrico satisface, al atraversar la superficie del disco, la condición necesaria de frontera $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

26. Una esfera de radio R posee una carga uniforme con densidad espacial ρ. El plano ecuatorial exterior es ilimitado y tiene una carga con densidad superficial σ. Hallar la intensidad E del campo eléctrico en el eje de simetría de la esfera, perpendicular al plano ecuatorial exterior cuya carga es homogénea.

27. Entre los puntos $x_1 = -l$ y $x_2 = l$ del eje X está distribuida uniformemente una carga con densidad lineal q. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

28. Un cilindro de radio R y altura $2h$ posee en todo el volumen una carga homogénea de densidad espacial ρ. Determinar el potencial φ del campo eléctrico en el eje de simetría tanto dentro como fuera del cilindro. Convencerse de que la expresión hallada para el exterior del cilindro, en el límite $R \to 0$ y $\pi\rho R^2 \to q$ se transforma en potencial del campo eléctrico de un segmento con carga uniforme.

29. Determinar el potencial φ de un campo eléctrico en el eje de simetría de los siguientes cuerpos cargados uniformemente: a) un anillo fino de radio R, cargado con densidad lineal q; b) una superficie cilíndrica de radio R y altura $2h$ cargado con densidad superficial σ; c) parte de un plano cortado por dos esferas concéntricas de radio R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y cargado con una densidad σ; d) un hemisferio de radio R, cargado con densidad superficial σ; e) un hemisferio de radio R, cargado con densidad espacial ρ.

30. Un plano infinito con un saliente en forma de hemisferio de radio R está cargado uniformemente con una densidad superficial σ. Determinar el potencial $\varphi = \varphi(z)$ del campo eléctrico en el eje Z, coincidente con el eje de simetría de la superficie compuesta cargada. Investigar $\varphi(z)$ en la proximidad del punto de curvatura $z = 0$ del hemisferio

($|z| \ll R$), así como a considerables distancias de éste ($|z| \gg R$). Al calibrar φ es necesario aceptar que el potencial en el punto de curvatura del hemisferio es nulo: $\varphi(0) = 0$.

31. Un hemisferio de radio R tiene en su interior distribuida una carga con densidad espacial $\rho = \rho_0 e^{ar}$, siendo ρ_0 y a constantes, y r la distancia hasta el centro de curvatura del hemisferio. Hallar la intensidad **E** del campo eléctrico en el centro de curvatura del hemisferio.

32. Una esfera de radio R está cargada con una densidad espacial $\rho = \rho_0 \cos\theta$, siendo θ el ángulo polar del sistema de coordenadas esféricas. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas, hallar el potencial φ del campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

33. Un anillo fino de radio R está cargado uniformemente con una densidad lineal q. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio. Demostrar que el potencial hallado en los puntos del eje del anillo coincide con la expresión obtenida en el problema 29 a).

34. La superficie de un hemisferio de radio R está cargada uniformemente con una carga Q. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas, hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio. Convencerse de que el potencial hallado en los puntos del eje de simetría del hemisferio coincide con la expresión obtenida en el problema 29 d).

35. Un disco fino con carga homogénea y radio R tiene una carga Q. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas, hallar el potencial φ e intensidad **E** del campo eléctrico en las lejanías del disco $r > R$, donde r es la distancia hacia el centro de éste. Demostrar que el potencial hallado en los puntos sobre el eje del disco coincide con la expresión obtenida en el problema 25.

36. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas, hallar el potencial φ del campo eléctrico dentro de una región esférica de radio R donde una mitad de ésta posee una carga uniforme con densidad espacial ρ.

§ 4. Fuerza y energía en la electrostática

37. La carga Q está distribuida uniformemente por la superficie de una esfera de radio R. Hallar el valor absoluto de la fuerza **F** que divide la esfera en dos hemisferios.

38. Una esfera de radio R tiene una carga homogénea con densidad espacial ρ. Aplicando el tensor maxwelliano de tensión, hallar la fuerza **F** que divide dicha esfera en dos mitades. Confirmar el resultado obtenido con un cálculo independiente mediante la fórmula $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV$, donde **E** es la intensidad del campo eléctrico de la esfera.

39. Un cilindro infinito de radio R tiene una carga uniforme con densidad espacial ρ. Valiéndose del tensor maxwelliano de tensión, hallar la fuerza **F** que divide el cilindro en dos mitades. Aquí **F** es la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud de una de las dos mitades del cilindro.

40. Determinar la energía W del campo electrostático de una esfera de radio R dentro de la cual está distribuida con homogeneidad una carga Q.

41. Determinar la energía W del campo electrostático de una esfera de radio R cargada uniformemente con densidad superficial σ.

42. Una esfera de radio R_1 con una carga Q homogénea, está ubicada excéntricamente en el interior de otra de radio R_2 con una carga uniforme de densidad espacial ρ. La carga de la esfera mayor no penetra en la menor. La distancia entre los centros de las mismas es igual a l. Considerando que las cargas de las esferas son de un mismo signo, determinar la fuerza **F** con la que la esfera menor es expulsada de la mayor. ¿A qué equivale la energía electrostática U de interacción entre éstas si el potencial del campo eléctrico de cada una en el infinito es igual a cero?

43. Un cilindro infinito de radio R_1 con una carga homogénea de densidad espacial ρ_1 está ubicado en el interior de otro de radio R_2 que tiene una carga uniforme con densidad espacial ρ_2. La carga del cilindro exterior no penetra en el interior. La distancia entre los ejes paralelos de los dos cilindros es igual a l. ¿A qué equivale la fuerza **F** que actúa sobre la unidad de longitud del cilindro interior? Determinar la energía electrostática $U = \int \rho_1 \varphi_2\, dV$ de interacción entre los cilindros que corresponde a la unidad de sus longi-

tudes. Aquí φ_2 es el potencial de las cargas del cilindro exterior. Para obtener un resultado unívoco es necesario admitir que el potencial, originado por las cargas de cada uno de los cilindros continuos homogéneos, sea igual a cero en su superficie.

44. En la nube electrónica del átomo de hidrógeno la densidad media de carga se describe por la función $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, siendo a el radio de Bohr y r la distancia hasta el protón con carga e. Considerando las aportaciones del protón y de la nube electrónica, hallar la distribución del potencial φ del campo eléctrico dentro del átomo. Investigar φ a pequeñas $r \ll a$ y grandes distancias $r \gg a$ del protón. ¿A qué equivale la energía electrostática U de interacción del protón con la nube electrónica, así como la propia energía electrostática W de esta última?

45. La parte de una esfera de radio R que se ve desde el centro de curvatura siendo el ángulo sólido $\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta_0)$ está cargada uniformemente con una densidad superficial σ. En el eje de simetría (eje de rotación), a una misma distancia del centro de curvatura y de la superficie cargada, está situada una carga puntual e. ¿A qué equivale la energía electrostática U de interacción de la carga con la superficie cargada?

46. Hallar la fuerza **F** que actúa sobre una carga e situada en el vértice de un cono cuya altura es h y radio de base R, si el volumen del cono tiene una carga homogénea de densidad espacial ρ.

47. Una superficie cónica de altura arbitraria y radio de la base R tiene una carga uniforme de una densidad superficial σ. Determinar el trabajo U que es necesario realizar para trasladar la carga e del infinito al vértice de la superficie cónica.

48. Mediante la intersección de una esfera de radio R con una superficie cónica, cuyo vértice se encuentra en el centro de la esfera, se ha obtenido un sector esférico. Una carga Q rellena uniformemente todo el volumen de dicho sector. Hallar el trabajo U que es necesario realizar para trasladar la carga e del infinito al centro de la esfera. ¿Variará el valor hallado de U si la carga Q se distribuye uniformemente por todo el volumen de la esfera?

49. En la nube electrónica de un átomo excitado de hidrógeno la densidad media de carga en coordenadas esfé-

ricas se expresa por la función

$$\rho = -\frac{er^4}{3^8\pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta,$$

siendo a el radio de Bohr y r la distancia hasta el protón con carga e. Hallar la energía electrostática U de interacción entre el protón y la nube electrónica.

§ 5. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias

50. El plano XY lleva una carga de una densidad superficial periódica $\sigma = \sigma_0 \cos(ax + by)$. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en un espacio infinito.

51. La densidad superficial de carga de los planos cartesianos XY, XZ, y YZ se escribe respectivamente $\sigma = \sigma_0 \operatorname{sen} a_1 x \operatorname{sen} b_1 y$, $\sigma = \sigma_0 \operatorname{sen} a_2 x \operatorname{sen} b_2 z$, $\sigma = \sigma_0 \times \operatorname{sen} a_3 y \operatorname{sen} b_3 z$, donde las magnitudes constantes satisfacen las condiciones

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \lambda.$$

Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

52. El espacio está lleno de una carga eléctrica de densidad periódica $\rho = \rho_0 \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \operatorname{sen} l_3 z$. Determinar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

53. La densidad de carga en un semiespacio $z \leqslant 0$ posee una estructura periódica $\rho = \rho_0 \cos \mathbf{kr}$, donde el vector constante $\mathbf{k}$ constituye con el eje Z un ángulo diferente de cero. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

54. La densidad espacial de carga en una placa infinita de espesor $2a$ posee una estructura periódica $\rho = \rho_0 \operatorname{sen} l_1 x \times \operatorname{sen} l_2 y \operatorname{sen} l_3 z$, donde $|z| \leqslant a$. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en el interior y exterior de la placa.

55. La densidad espacial de carga dentro de una esfera de radio R es, en coordenadas esféricas, simétrica respecto al eje Z y se expresa por $\rho = \rho_0 \cos\theta$, donde θ es el ángulo polar, además el origen de coordenadas coincide con el centro de la esfera. Hallar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en todo el espacio.

56. Un cilindro infinito de radio R tiene una carga uniforme en toda su longitud con una densidad espacial $\rho = \rho_0 \cos \psi$, donde ψ es el ángulo polar y el eje Z del sistema de coordenadas cilíndricas coincide con el eje del cilindro. Hallar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico dentro y fuera del cilindro.

57. La carga está distribuida por la superficie de una esfera de radio R con una densidad superficial $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, donde θ es el ángulo polar del sistema de coordenadas esféricas, cuyo origen coincide con el centro de la esfera. Hallar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

58. Una superficie cilíndrica infinita de radio R está cargada con una densidad superficial $\sigma = \sigma_0 \cos \psi$, donde ψ es el ángulo polar del sistema de coordenadas cilíndricas con el eje Z, orientado a lo largo del eje de simetría de la superficie. Por medio de un campo eléctrico exterior, transversal y homogéneo con una intensidad $\mathbf{E}_0$ la superficie cilíndrica se mantiene en potencial cero. Hallar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico total dentro y fuera de la superficie cilíndrica, así como definir el valor de $\mathbf{E}_0$.

59. La densidad espacial de carga dentro de una esfera de radio R se expresa por $\rho = \mathbf{ar}$, siendo $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{r}$ el radio vector trazado desde el centro de la misma. Hallar la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera.

60. La densidad espacial de carga en coordenadas esféricas se expresa por la función

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n (\cos \theta) \quad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n (\cos \theta) \quad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo ρ_0 y R constantes, $P_n (\cos \theta)$ el polinomio de Legendre de orden $n > 1$. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en un espacio infinito.

61. La densidad espacial de carga en coordenadas cilíndricas se da de la siguiente forma

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo ρ_0 y R constantes y n un número entero, positivo y mayor de la unidad. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

62. El potencial φ_s de una superficie cilíndrica infinita de radio R está dado por la expresión, $\varphi_s = \varphi_0 \cos n\psi$, siendo φ_0 constante, n un número entero, ψ el ángulo polar y el eje Z coincide con el eje de la superficie cilíndrica dada. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio si en el interior y exterior de la superficie cilíndrica no hay cargas. Determinar cómo se distribuye la densidad superficial de carga σ en la superficie cilíndrica.

63. Se da el potencial φ_s de una superficie esférica de radio R, $\varphi_s = \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)]$, siendo $Y_{lm}(\theta, \psi)$ una función esférica, θ y ψ los ángulos polar y azimutal del sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con el centro de la esfera. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio admitiendo que tanto dentro como fuera de la superficie esférica no hay cargas. Determinar cómo se distribuye la densidad superficial de carga σ en la superficie esférica.

64. Determinar el potencial φ de un campo eléctrico en la región $0 \leqslant x$, limitada por tres planos $x = 0$, $y = 0$, $y = b$. Se supone que el plano $x = 0$ posee un potencial homogéneo φ_0, mientras que los otros dos planos se mantienen con un potencial cero. En el interior de esta región no hay cargas.

65. Determinar el potencial φ de un campo eléctrico en el interior de una caja de longitud infinita y sección rectangular $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ para las siguientes condiciones de contorno: el potencial de dos caras $x = 0$ e $y = b$ es homogéneo e equivalente a φ_0, mientras que el potencial de las otras dos caras de la caja es igual a cero. Dentro de la caja no hay cargas.

66. Determinar el potencial φ del campo eléctrico en el interior de un hemisferio de radio R, si el potencial en su superficie es constante φ_0, y en la base del hemisferio se mantiene igual a cero. Dentro del hemisferio no hay cargas.

67. Un plano infinito tiene un saliente en forma de hemisferio de radio R. El potencial del hemisferio es homogéneo e igual a φ_0, mientras que el potencial del plano se mantiene nulo. Determinar el potencial φ del campo eléctrico en el semiespacio superior al plano con saliente, considerando que en dicho semiespacio no hay cargas.

68. Cada mitad de una superficie esférica de radio R posee potencial constante, una φ_a y la otra φ_b. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en el exterior de la esfera, donde no hay cargas.

69. Una circunferencia de radio R divide el plano en dos regiones: interior y exterior. La interior posee un potencial homogéneo φ_0, mientras que el potencial de la exterior se mantiene nulo. Aplicando el desarrollo en polinomios de Legendre, determinar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del semiespacio en la parte superior del plano indicado. En la región que se examina no hay cargas.

70. Una superficie esférica de radio R está compuesta por dos hemisferios con cargas uniformes y de signo opuesto. Las densidades superficiales de estas cargas son iguales a σ y $-\sigma$. El eje Z coincide con el eje de simetría y está orientado de las cargas negativas hacia las positivas. Hallar el potencial φ del campo eléctrico dentro y fuera de la superficie esférica.

71. El potencial φ_s de una superficie cilíndrica infinita de radio R se expresa de forma $\varphi_s = \varphi_a$, para $0 < \psi < \pi$ y $\varphi_s = \varphi_b$ para $\pi < \psi < 2\pi$, siendo φ_a y φ_b constantes, ψ el ángulo polar, además el eje Z coincide con el eje de la superficie cilíndrica. Hallar el potencial φ en cada punto del espacio admitiendo que no hay cargas dentro y fuera de la superficie cilíndrica.

72. La densidad de carga en una superficie cilíndrica infinita de radio R se expresa de forma $\sigma = \sigma_a$ para $0 < < \psi < \pi$ y $\sigma = \sigma_b$ para $\pi < \psi < 2\pi$, siendo σ_a y σ_b constantes, ψ el ángulo polar, además el eje Z coincide con el eje de la superficie cilíndrica. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

73. El potencial de un plano infinito se da de tal forma que dentro de un círculo de radio R es constante e igual a φ_0, mientras que fuera del mismo es nulo. En el semiespacio que se examina y que limita con el plano dado no hay cargas. Determinar el potencial φ en cada punto del semiespacio mencionado, desarrollando la función que se busca φ en integral de Fourier-Bessel

74. Un disco fino de radio R tiene una carga uniforme con densidad superficial σ. Aplicando el desarrollo en la integral de Fourier—Bessel, hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

75. El potencial del campo eléctrico en la superficie de un disco fino de radio R tiene un valor fijo φ_0. Aplicando el desarrollo en la integral de Fourier—Bessel hallar el potencial φ en cada punto del espacio admitiendo que dentro del disco no hay cargas. Determinar cómo se distribuye la densidad superficial de carga σ en el disco.

§ 6. Densidad de carga en cuerpos de diferente configuración

76. El potencial φ de un campo eléctrico en coordenadas cilíndricas se expresa por:

$$\varphi = a(3R - 2r) r \cos\psi \quad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\varphi = \frac{aR^3}{r} \cos\psi \quad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo a y R constantes. Hallar la distribución de la densidad espacial ρ de la carga que ha originado este campo eléctrico (problema inverso de la electrostática).

77. Hallar la distribución de la densidad espacial ρ de la carga que engendró en el espacio un campo eléctrico y cuyo potencial φ en coordenadas esféricas puede expresarse:

$$\varphi = \frac{e}{2R}\left(3 + \frac{2R}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\varphi = \frac{2e}{r} \quad \text{para } r \geqslant R,$$

donde e y R son constantes. ¿A qué equivale la carga total Q?

78. El potencial φ de un campo eléctrico en coordenadas esféricas se expresa por: $\varphi = Q/R$ para $r \leqslant R$ y $\varphi = Q/r$ para $r \geqslant R$, siendo Q y R constantes. Hallar la distribución de la carga que origina este campo eléctrico.

79. El potencial φ de un campo eléctrico en coordenadas cilíndricas es: $\varphi = 0$ para $r \leqslant R$ y $\varphi = q \ln \frac{R}{r}$ para $r \geqslant R$, siendo q y R constantes. Hallar la distribución de la carga que origina este campo eléctrico.

80. Aplicando las propiedades de la δ-función hallar la distribución de la densidad espacial de carga ρ en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas cuando en el espacio existen los siguientes sistemas de cargas homogéneas: a) una superficie esférica de radio R, cargada con una densidad

superficial σ (el centro de la esfera coincide con el origen de coordenadas); b) un anillo fino de radio R, cargado con una densidad lineal q (el anillo se encuentra en el plano XY y su centro coincide con el origen de coordenadas); c) un hilo infinito que coincide con el eje Z y está cargado con una densidad lineal q; d) un plano XY cargado con una densidad superficial σ; e) una superficie cilíndrica infinita de radio R cargada con una densidad superficial σ (el eje de simetría coincide con el eje Z).

81. Valiéndose de las propiedades de la δ-función, así como de la función

$$\eta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{para } \alpha > 0, \\ 0 & \text{para } \alpha < 0, \end{cases}$$

hallar la distribución de la densidad espacial de carga ρ en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas cuando en el espacio existen los siguientes sistemas de cargas homogéneas: a) un hemisferio de radio R, cargado con una densidad superficial σ (el origen de coordenadas coincide con el centro de curvatura y el eje Z está orientado hacia la concavidad del hemisferio); b) una semicircunferencia de radio R ubicada en el primero y segundo cuadrante del plano XY y cargada con una densidad lineal q (el centro de curvatura de la semicircunferencia coincide con el origen de coordenadas y su diámetro se encuentra en el eje X); c) una varilla fina de longitud l, ubicada en la parte positiva del eje Z y cargada con una densidad lineal q (un extremo de la varilla se encuentra en el origen de coordenadas); d) un disco fino de radio R que se encuentra en el plano XY y está cargado con una densidad superficial σ (el centro del disco coincide con el origen de coordenadas); e) una superficie cilíndrica de radio R y altura h, cargada con una densidad superficial σ (la base de la superficie cilíndrica se encuentra en el plano XY y su eje de simetría coincide con el eje Z).

82. Una elipse con semiejes a y b se encuentra en el plano XY y tiene una carga uniforme de una densidad lineal q. El centro de la elipse coincide con el origen de coordenadas y el semieje mayor a se encuentra en el eje X. Determinar cómo se distribuye la densidad espacial de carga ρ en coordenadas cartesianas.

83. Una superficie elíptica de revolución con semiejes a y b tiene una carga uniforme de una densidad superficial σ. El centro de la superficie elíptica coincide con el origen del

sistema de coordenadas cartesiano y el semieje b se encuentra en el eje Z que a su vez es eje de simetría axial. Hallar cómo se distribuye la densidad espacial de carga ρ en coordenadas cartesianas.

84. En el espacio la distribución de la densidad espacial de carga en coordenadas esféricas se describe por medio de la δ-función de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{a}{r^2}\,\delta(1-\cos^2\theta),$$

siendo a constante. Determinar la forma del cuerpo cargado y el carácter de distribución de la carga en él.

85. Determinar la forma del cuerpo con carga y el carácter de distribución de ésta en él, si la densidad espacial de carga en el espacio en coordenadas cartesianas se describe mediante la siguiente función:

a) $\rho = 2\,|\,a\,|\,\sigma\delta\,(x^2 - a^2)$, siendo a y σ constantes;

b) $\rho = 2\,|\,a\,|\,q\delta\,(x^2 - a^2)\,\delta\,(z)$, siendo a y q constantes;

c) $\rho = 2q\sqrt{a^2+b^2}\,\delta\,(x^2 - 2ax - 2by + y^2)\,\delta\,(z)$, siendo a, b, q constantes;

d) $\rho = \frac{Q}{\pi ab}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\delta\,(z)$, siendo a, b, Q constantes positivas;

e) $\rho = \frac{Q}{2\pi abc}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$, siendo a, b, c, Q constantes positivas.

§ 7. Momento dipolar

86. Demostrar que el momento dipolar de un sistema cargado no depende de la elección del origen de coordenadas si la carga total del sistema es igual a cero.

87. Una superficie cónica con generatriz l y radio de base R tiene una carga uniforme de densidad superficial σ. El vértice de la superficie cónica se encuentra en el origen de coordenadas y la altura en la parte positiva del eje Z. Hallar la distribución de la densidad de carga ρ en el espacio en coordenadas esféricas. Valiéndose de la expresión obtenida, calcular el momento dipolar **d**.

88. Una varilla fina de longitud l, cargada uniformemente con una densidad lineal q, se encuentra en el primer cuadrante del plano XY y forma con el eje X el ángulo ψ_0.

Uno de los extremos de la varilla coincide con el origen de coordenadas. Hallar la distribución de la densidad de carga ρ en el espacio en coordenadas cilíndricas. Valiéndose de la expresión obtenida, calcular el momento dipolar **d**.

89. Expresar mediante la δ-función la distribución de la densidad espacial de carga ρ de un dipolo puntual con momento **d**, ubicado en el punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}_0$.

90. Aplicando la transición límite

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} el = \mathbf{d}$$

y la expresión para el potencial de las cargas e y $-e$, ubicadas en los puntos con radio vector $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$ y $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_0$, determinar el potencial φ del campo eléctrico de un dipolo puntual con momento **d**.

91. Convencerse de que la intensidad **E** del campo eléctrico de un dipolo con momento **d**, situado en el origen de coordenadas puede ser representado de la siguiente forma: $\mathbf{E} = (\mathbf{d}\ \mathrm{grad})\ \mathrm{grad}\ 1/r$.

92. Un dipolo con momento **d** está situado en el origen de coordenadas, mientras que el centro de una esfera de radio R se encuentra en el punto cuyo radio vector es **r** ($r > R$). El volumen de la esfera está relleno con una carga homogénea Q. Hallar la energía U de interacción entre el dipolo y la esfera, así como la fuerza **F** aplicada a esta última.

93. El volumen de una esfera de radio R está cargada con densidad espacial $\rho = ar^2$, siendo a una constante y r la distancia hasta el orígen de coordenadas situado en el centro de la esfera. En el punto con radio vector $\mathbf{r}_0$ está ubicado un dipolo de momento **d**. Determinar la fuerza **F** y el momento **N** de las fuerzas aplicadas al dipolo en dos casos: a) $r_0 > R$; b) $r_0 < R$.

94. Un dipolo con momento $\mathbf{d}_1$ está situado en el origen de coordenadas y otro con el momento $\mathbf{d}_2$ se encuentra en un punto con radio vector **r**. Determinar la fuerza **F** y el momento **N** de las fuerzas aplicadas a cada dipolo.

95. La distribución de la densidad de carga en el espacio se representa por $\rho(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\nabla)\,\delta(\mathbf{r})$, siendo **a** un vector constante. Valiéndose de la solución general de la ecuación Poisson, hallar el potencial del campo eléctrico en cada punto del espacio. A partir de la forma del potencial obtenido determinar el sentido físico del vector **a**.

96. En cada punto del espacio se da el momento dipolar eléctrico $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ de la unidad de volumen. La función vectorial $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ disminuye en el infinito con mayor rapidez que $1/r^2$. Demostrar que la distribución dada de la densidad del momento dipolar $\mathbf{P}$ crea en cada punto del espacio el mismo campo eléctrico que una carga distribuida con densidad espacial $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$.

§ 8. Tensor del momento cuadripolar

97. Demostrar que el tensor del momento cuadripolar de un sistema de cargas no depende de la elección del origen de coordenadas si la carga total y el momento dipolar del sistema son nulos.

98. En la nube electrónica de un átomo de hidrógeno excitado la densidad media de carga se expresa en coordenadas esféricas por la función

$$\rho = -\frac{1}{4 \cdot 3^8} \frac{er^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \operatorname{sen}^4 \theta,$$

siendo a el radio Bohr y r la distancia hasta el protón con carga e. Determinar el tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del átomo. ¿A qué equivale el momento dipolar $\mathbf{d}$?

99. El origen del sistema de coordenadas cartesiano coincide con el centro de curvatura de un hemisferio de radio R, y el eje Z está orientado a lo largo del eje de simetría en dirección de la concavidad de la superficie. Determinar las componentes de los momentos cuadripolares del dipolo d_α y del tensor $D_{\alpha\beta}$ si la carga Q está distribuida uniformemente por: a) el volumen del hemisferio; b) la superficie del hemisferio; c) la superficie y base del hemisferio.

100. Una circunferencia está compuesta de dos mitades cargadas uniformemente y con signo opuesto. Determinar las componentes del tensor del momento cuadripolar.

101. Un hemisferio de radio R que tiene una carga uniforme Q distribuida por la superficie está elevado sobre el plano XY. La base del hemisferio es tangente a los ejes X y Y en los puntos de coordenadas positivas. Determinar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

102. Una semicircunferencia cargada uniformemente se encuentra en el primer cuadrante del plano XY y tiene una carga Q. Un extremo de la semicircunferencia descansa en el origen de coordenadas, mientras que el otro en el punto

$x = 2R$ del eje X. Determinar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

103. El centro de una elipse de semiejes a y b coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano. El semieje mayor a se encuentra en el eje X y el menor b en el eje Y. La densidad lineal de carga q en la elipse es homogénea. Admitiendo que la excentricidad ε de la elipse es insignificante ($\varepsilon \ll 1$) determinar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar con exactitud hasta los miembros de un orden ε^2.

104. El centro de una superficie elíptica de revolución de semiejes a y b que tiene una carga homogénea de densidad superficial σ coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano. El semieje menor b se encuentra en el eje Z que es el eje de rotación. La excentricidad ε de la elipse es considerablemente menor que la unidad ($\varepsilon \ll 1$). Conservando los miembros que contienen el mínimo grado del parámetro ε, determinar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

105. En los vértices de un cuadrado de lado $2a$ están situadas cargas puntuales. El signo de cada carga e, al pasar de un vértice a otro vecino se invierte. Aplicando la fórmula general

$$D_{\alpha\beta} = \sum_m e_m (3x_{m\alpha}x_{m\beta} - r_m^2 \delta_{\alpha\beta}),$$

hallar los tensores del momento cuadripolar en los sistemas

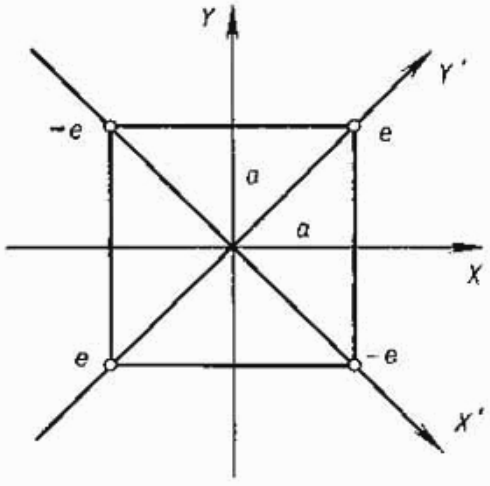


Fig. 1

do coordenadas cartesianos XYZ y $X'Y'Z'$, éste último se obtiene girando el primero en torno al eje común $Z \equiv Z'$ (fig. 1). Determinar la matriz de rotación $a_{\alpha\beta}$ y convèncerse con cálculos directos de que los tensores hallados $D_{\alpha\beta}$ y $D'_{\alpha\beta}$ satisfacen la proporción $D'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}D_{\sigma\gamma}$, donde con tilde vienen señaladas las componentes del tensor del momento cuadripolar en el sistema de coordenadas con tilde.

106. En el eje X, a una misma distancia a del origen de coordenadas, hay dos dipolos puntuales. En el punto de coordenada negativa el momento dipolar **d** es antiparalelo al eje X, mientras que el otro momento dipolar en el plano XY forma con el eje X un ángulo α. Determinar las componentes del momento dipolar d_α y del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del sistema.

107. Determinar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar de un elipsoide de revolución cargado uniformemente y cuyos semiejes son a y b. El centro del elipsoide de revolución coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano, el semieje menor b se encuentra en el eje Z que al mismo tiempo es el eje de simetría axial. La carga total es igual a Q. ¿Qué aspecto tomará el tensor del momento cuadripolar al girar el elipsoide dado, respecto al eje Y en el sentido de las agujas del reloj, un ángulo α?

108. El origen del sistema de coordenadas cartesiano coincide con el centro de un elipsoide con semiejes a, b y c, cargado con homogeneidad. El semieje c coincide con el eje Z y el semieje mayor a forma con el eje X un ángulo α. La carga total del elipsoide es igual a Q. Hallar las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

109. El centro de una circunferencia de radio R coincide con el origen de coordenadas. Uno de los diámetros de la circunferencia descansa en el eje X, mientras que otro, perpendicular al anterior, forma un ángulo α con el eje Y y se encuentra en el primer y tercer cuadrante del plano YZ. La densidad lineal de carga en la circunferencia es homogénea y la carga total Q. Determinar en el sistema de coordenadas cartesiano XYZ las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

110. Un sistema cargado se caracteriza por el tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar. Hallar la intensidad **E** del campo eléctrico en coordenadas cartesianas.

111. Hallar el potencial φ del campo eléctrico si la distribución de la densidad de carga en el espacio tiene la

forma

$$\rho(\mathbf{r}) = a_{\alpha\beta}\left(3\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} - \delta_{\alpha\beta}\nabla^2\right)\delta(\mathbf{r}),$$

siendo $a_{\alpha\beta}$ un tensor constante arbitrario. Investigando la expresión obtenida para el potencial, determinar el sentido físico del tensor $a_{\alpha\beta}$.

112. Expresar las componentes del momento dipolar d_α y del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar de un sistema cargado mediante las correspondientes componentes de los momentos multipolares

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \rho r^l Y_{lm}(\theta,\ \psi)\,dV,$$

siendo ρ la densidad espacial de carga y $Y_{lm}(\theta,\ \psi)$ una función esférica.

113. El potencial $\varphi(\mathbf{r})$ de un campo eléctrico exterior varía insignificantemente a lo largo de las dimensiones de un sistema cargado. Teniendo en cuenta la carga total, así como los momentos dipolar y cuadripolar, determinar la energía potencial U del sistema cargado en el campo exterior dado, si el sistema señalado representa de por sí: a) tres cargas e, e y $-2e$ situadas en el eje X a una misma distancia a entre sí (la carga negativa se encuentra en el punto $x = 0$ entre las positivas); b) tres cargas e, e y $-e$ situadas en el plano XY en los vértices de un triángulo equilátero con lado a y centro en el origen del sistema de coordenadas cartesiano (la carga negativa se encuentra en la parte positiva del eje X); c) el cuadrípolo representado en la fig. 2;

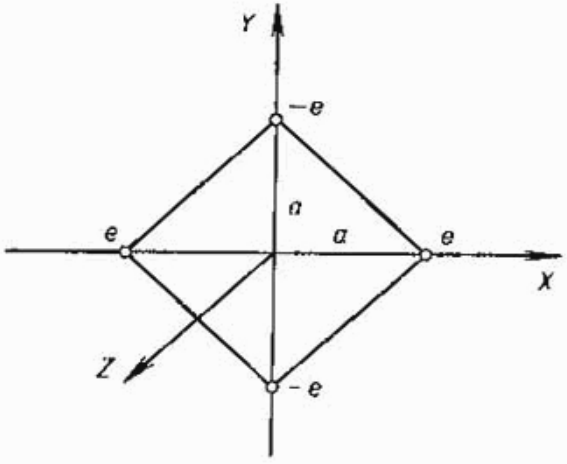


Fig. 2

d) un elipsoide con carga homogénea y semiejes a, b y c cuyo centro se encuentra en el origen del sistema de coordenadas cartesiano (la carga total del elipsoide es Q).

114. El potencial φ (r) de un campo eléctrico exterior varía poco a lo largo de un disco fino, cargado uniformemente y de forma elíptica con semiejes a y b. La carga total del disco es igual a Q, y los semiejes a y b se encuentran respectivamente en los ejes X e Y del sistema de coordenadas cartesiano. Hallar la energía electrostática U del disco en el campo exterior teniendo en cuenta el momento cuadripolar. ¿A qué equivale la fuerza **F** aplicada al disco?

115. La intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ de un campo eléctrico exterior varía poco a lo largo de una región del espacio donde se encuentra una carga con densidad espacial $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Desarrollando **E** (r) en serie de Taylor en el punto interior de la región cargada y menospreciando las derivadas de alto orden, expresar la fuerza $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E}\, dV$, aplicada al sistema cargado, mediante su carga total Q, momento dipolar **d** y tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

116. En una región limitada del espacio hay concentrada una carga de densidad espacial $\rho = \rho(\mathbf{r})$. La intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ del campo eléctrico exterior varía poco dentro de la región mencionada. Desarrollando **E** (r) en serie de Taylor y menospreciando las derivadas superiores expresar el momento **N** de fuerzas $\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E})\, \rho\, dV$, aplicados al sistema cargado, a través de su momento dipolar **d** y tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar.

117. Se da en coordenadas esféricas la densidad media de carga en una nube electrónica del átomo de hidrógeno

$$\rho = -\frac{2}{3^8}\frac{er^2}{\pi a^5}\left(6 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3a}} \cos^2\theta,$$

siendo a el radio de Bohr y r la distancia hasta el protón con carga e. La intensidad **E** del campo eléctrico exterior como función de las coordenadas varía con insignificancia en el espacio. Determinar la fuerza **F** y momento **N** de las fuerzas aplicadas al átomo teniendo en cuenta su momento cuadripolar.

118. Una varilla fina de longitud $2l$ con una carga homogénea de densidad lineal q se encuentra en el plano XY formando un ángulo ψ_0 con el eje X. El punto medio de la

varilla está en el origen de coordenadas. A una distancia lejana de la varilla, en el eje X, hay una carga puntual e. Determinar el momento **N** de fuerzas, aplicado a la varilla con respecto a su punto medio.

§ 9. El campo a grandes distancias de un sistema cargado

119. El origen del sistema de coordenadas cartesiano coincide con el centro de un cuerpo de revolución cargado uniformemente y el eje Z está orientado por el eje de simetría de orden superior. En el desarrollo del potencial φ del campo eléctrico hallar el miembro cuadripolar a grandes distancias si el cuerpo mencionado es: a) un anillo fino de radio R, cargado con una densidad lineal q; b) un cilindro de radio R y altura $2h$, cargado con densidad espacial ρ; c) una superficie cilíndrica de radio R y altura $2h$, cargada con densidad superficial σ; d) un segmento de longitud $2l$ cargado con densidad lineal q.

120. Hallar el potencial φ de un campo eléctrico a grandes distancias con exactitud hasta el miembro cuadripolar, para el siguiente sistema de cargas puntuales: a) tres cargas e, e y $-2e$ situadas en el eje Z a una misma distancia a entre sí (la carga negativa se encuentra en el punto $z = 0$ entre las positivas); b) tres cargas e, e y $-e$ situadas en el plano XY en los vértices de un triángulo equilátero de lado a y con el centro en el origen de coordenadas cartesianas (la carga negativa se encuentra en la parte positiva del eje Y); c) cuadrípolo representado en la fig. 3.

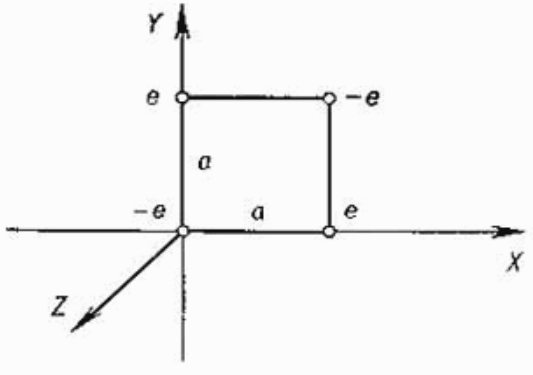


Fig. 3

121. Hallar el potencial φ de un campo eléctrico a grandes distancias de dos dipolos puntuales, idénticos y antiparalelos ubicados en el eje X a una misma distancia a del origen de coordenadas. En el punto de coordenada positiva $x = a$ el momento dipolar es paralelo al eje Z y equivalente a $\mathbf{d}$. Realizar los cálculos de dos formas: a) primero calcular el tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del sistema y a continuación determinar su campo eléctrico; b) hallar el campo eléctrico del sistema como una superposición de campos de los dipolos aislados.

122. Dos varillas idénticas de longitud l con cargas homogéneas están en el plano XY y forman un ángulo igual a ψ_0. El vértice de éste coincide con el origen de coordenadas y uno de los lados está orientado por el eje X. ¿Cuál deberá ser el valor del ángulo ψ_0 para que en el punto x_0 del eje X, a gran distancia de las varillas cargadas, el potencial dipolar sea equivalente al cuadripolar?

123. Dos mitades de una circunferencia de radio R con cargas homogéneas y de signo opuesto se encuentran en el primer cuadrante del plano XY. La semicircunferencia cargada negativamente y que tiene una carga $-Q$ es tangente a los ejes X e Y y el diámetro que divide las cargas opuestas es paralelo al eje X. Hallar a grandes distancias y con exactitud hasta el miembro cuadripolar el potencial φ del campo eléctrico.

124. Un cilindro de radio R y altura $2h$ tiene una carga homogénea por todo el volumen y equivalente a Q. El eje Z coincide con la generatriz del cilindro y el eje X está orientado por el diámetro de su base. Hallar a grandes distancias del cilindro y con exactitud hasta el miembro cuadripolar el potencial φ del campo eléctrico.

125. Tomando en consideración la carga total y el tensor del momento cuadripolar, hallar el potencial φ del campo eléctrico a grandes distancias de un sistema cargado, si la distribución de la densidad espacial de carga se expresa en coordenadas cartesianas por la siguiente función:

$$\text{a)}\ \rho = \frac{Q}{\pi ab}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\delta(z),$$

siendo a, b y Q constantes;

$$\text{b)}\ \rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b}\,\delta\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right).$$

siendo a, b y Q constantes;

$$\text{c)}\ \rho = \frac{Q}{2\pi abc}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

siendo a, b, c, Q constantes.

126. Un hemisferio de radio R tiene una carga homogénea de densidad superficial σ. Aplicando el desarrollo de la función $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en funciones esféricas $Y_{lm}(\theta, \psi)$, representar el potencial φ del campo eléctrico fuera del hemisferio como el desarrollo en momentos multipolares

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \psi)\, dV.$$

127. Una circunferencia de radio R está compuesta de dos mitades con cargas uniformes y de signo opuesto Q y $-Q$. El origen de coordenadas coincide con el centro de la circunferencia, el eje Y está orientado de las cargas negativas a las positivas y el eje X divide estas cargas entre sí. En el eje de la circunferencia, a gran distancia $z \gg R$ de ella, se encuentra un dipolo con momento **d**, paralelo al eje Z. Determinar la fuerza **F** y momento **N** de las fuerzas aplicadas al dipolo.

128. El volumen de un elipsoide con semiejes a, b, c, está relleno con homogeneidad por una carga Q. El origen del sistema de coordenadas cartesiano coincide con el centro del elipsoide y los semiejes a, b y c se encuentran respectivamente en los ejes X, Y, Z. A gran distancia del elipsoide, en el punto con radio vector **r** hay un dipolo cuyo momento es **d**. Hallar la energía electrostática U de interacción entre el dipolo y elipsoide tomando en consideración el miembro dipolo-cuadripolar.

129. Una semicircunferencia de radio R tiene una carga homogénea Q. El centro de curvatura de la semicircunferencia coincide con el origen de coordenadas y su diámetro se encuentra en el eje X. El eje Y está orientado en dirección a la semicircunferencia. Teniendo en cuenta la carga Q, así como los momentos dipolar y cuadripolar, hallar la fuerza **F** aplicada a la carga e que se encuentra en el eje Z a gran distancia de la semicircunferencia.

130. A gran distancia de un elipsoide cargado uniformemente hay una carga e con radio vector **r**. Los semiejes a, b y c del elipsoide están respectivamente orientados por los

ejes del sistema de coordenadas cartesiano X, Y, Z. La carga total del helipsoide es equivalente a Q. Tomando en consideración el tensor del momento cuadripolar, hallar la desviación ΔF con respecto a la ley de Coulomb para la fuerza F aplicada a la carga e.

131. En el eje Z, a gran distancia L entre sí ($L \gg a$, donde a es el radio de Bohr), hay dos átomos excitados de hidrógeno. Las densidades medias de carga ρ_1 y ρ_2 de las nubes electrónicas de estos átomos, en coordenadas esféricas son respectivamente

$$\rho_1 = -\frac{1}{3^8}\frac{er_1^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r_1}{3a}} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta,$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{4\cdot 3^8}\frac{er_2^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r_2}{3a}} \operatorname{sen}^4\theta,$$

donde e es la carga del protón y r_1, r_2 las distancias entre el punto de observación y los centros del primero y segundo átomo. Determinar la energía U cuadripolo-cuadripolar de interacción entre los átomos.

§ 10. Capa eléctrica doble

132. Una capa eléctrica doble homogénea tiene forma de disco de radio R y está ubicada en el plano XY. El centro del disco coincide con el origen de coordenadas y la densidad τ del momento dipolar es paralela al eje Z. Hallar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en el eje Z.

133. Una capa eléctrica doble homogénea tiene configuración de hemisferio de radio R con el centro de curvatura en el origen de coordenadas cartesiano y el eje de simetría coincidiendo con el eje Z. Este último está orientado hacia la convexidad del hemisferio. La densidad del momento dipolar en el hemisferio está orientada por el radio al exterior. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en el eje Z.

134. Una capa eléctrica doble en forma de semiplano ($y = 0$, $x \geqslant 0$) tiene una densidad τ del momento dipolar. Determinar el potencial φ e intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico en cada punto del espacio si el vector constante τ en el sistema de coordenadas cartesiano es paralelo al eje Y.

135. En el plano de una capa eléctrica doble homogénea hay un orificio redondo de radio R. El origen del sistema

de coordenadas cartesiano coincido con el centro del orificio y el eje Z es paralelo a la densidad τ del momento dipolar. Hallar la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada sobre una carga puntual e que se encuentra en el eje Z.

136. Una capa eléctrica doble homogénea tiene la forma de plano con un saliente en forma de hemisferio. La densidad τ del momento dipolar es, en cada punto de la superficie compuesta, paralela a su perpendicular y está orientada hacia el semiespacio en el cual penetra el saliente. Hallar el potencial φ del campo eléctrico en cada punto del espacio.

137. Demostrar que la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico de una capa doble homogénea tiene el aspecto $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$, siendo τ el módulo del vector τ de la intensidad del momento dipolar en la capa eléctrica doble, $d\mathbf{l}'$ el elemento del contorno cerrado L sobre el cual está tendida dicha capa, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ los radio vectores correspondientes al punto de observación y al punto donde se encuentra el elemento $d\mathbf{l}'$. La trayectoria del contorno de integración L está en concordancia con la orientación del vector τ según la regla del sacacorchos.

Capítulo II CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

En el vacío el vector intensidad **H** del campo magnético se determina a partir de la fuerza que actúa sobre un elemento $d\mathbf{l}$ del contorno por el cual circula una corriente J:

$$k\mathbf{F} = \frac{J}{c}(d\mathbf{l} \times \mathbf{H}). \qquad \text{(II.1)}$$

Aquí c es la constante electrodinámica, numéricamente equivalente a la velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{10}$ *cm/s*.

El campo magnético estacionario en el vacío se engendra por corrientes constantes. En el espacio la distribución de las corrientes se caracteriza por la densidad espacial **j** (**r**) y en las superficies por la densidad superficial **i** (**r**). En el espacio puede también darse la corriente de línea J que pasa por el interior de un tubo largo y muy fino.

La intensidad del campo magnético estacionario satisface las ecuaciones de Maxwell:

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \text{(II.2)}$$

$$\text{div}\,\mathbf{H} = 0. \qquad \text{(II.3)}$$

Si las corrientes circulan por una region finita, la intensidad del campo magnético estacionario, a grandes distancias r de la corriente, disminuye con más rapidez que $1/r^3$. Esta afirmación es una condición suplementaria a las ecuaciones de Maxwell (II.2) y (II.3) cuando se busca **H** en un espacio ilimitado.

Las componentes, normal $H_n = \mathrm{Hn}$ y tangencial $H_\tau = \mathrm{H}\tau$ de la intensidad del campo magnético satisfacen, en la superficie por la cual está distribuida la corriente con

densidad superficial i, las correlaciones

$$H_{2n} - H_{1n} = 0, \tag{II.4}$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N, \tag{II.5}$$

donde $i_N = iN$, mientras que los vectores unitarios n, τ y N forman una terna a dextrógiro $n \times \tau = N$. Los subíndices 1 y 2 señalan la intensidad del campo magnético en la primera y segunda regiones situadas a uno y otro lado de la superficie de corriente. El vector n de la normal a esta superficie está orientado de la primera a la segunda región. Frecuentemente la fórmula (II.5) se escribe en forma vectorial:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}.$$

Las correlaciones (II.4) y (II.5) son en la magnetostática las condiciones de frontera.

Aplicando las propiedades de la δ-función, la distribución superficial de la corriente con densidad i (r) puede tomarse en consideración en la densidad espacial j (r), la cual es una función singular tendente al infinito en los puntos de la superficie de corriente. En este caso, al resolver las ecuaciones de Maxwell (II.2) y (II.3) con la función singular j (r) , obtenida de esta manera, no harán falta las condiciones de frontera (II.4) y (II.5).

El campo magnético de una corriente de línea J se define mediante la ley de Biot y Savart

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J\, d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{II.6}$$

donde r y r′ son los radios vectores del punto de observación y del punto de ubicación del elemento de corriente Jdl'. El campo magnético total es, conforme al principio de superposición, la suma de los campos engendrados por cada elemento de corriente por separado,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{II.7}$$

Para hallar H, cuando la distribución de la corriente posee una simetría axial o simetría respecto al plano, es útil valerse del teorema sobre la circulación de la intensidad

del campo magnético

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J, \qquad \text{(II.8)}$$

donde J es la suma algebraica de las corrientes abarcadas por el contorno cerrado L. En el caso general la corriente J es el conjunto de corrientes espaciales, superficiales y de línea que atraviesan una superficie arbitraria tendida sobre el contorno de integración L. La dirección positiva de circulación de la corriente J se vincula con la trayectoria del contorno de integración L según la regla del sacacorchos.

Desde el punto de vista de las matemáticas es más conveniente pasar de dos ecuaciones de primer grado (II.2) y (II.3) a una ecuación equivalente de segundo grado para el potencial vectorial **A**, el cual se determina de la correlación

$$\mathbf{H} = \text{rot}\, \mathbf{A}. \qquad \text{(II.9)}$$

Este potencial vectorial se define no unívocamente, ya que la intensidad del campo magnético no varía si se pasa, transformando mediante la calibración, a otro potencial vectorial $\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\, f, \qquad \text{(II.10)}$$

donde $f = f(\mathbf{r})$ es una función arbitraria.

A fin de limitar la arbitrariedad en la selección del potencial vectorial se impone suplementariamente la condición de Lorentz

$$\text{div}\, \mathbf{A} = 0. \qquad \text{(II.11)}$$

En este caso el potencial vectorial del campo magnético satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \qquad \text{(II.12)}$$

En las superficies que separan dos regiones se observan las condiciones de frontera

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \qquad \text{(II.13)}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2. \qquad \text{(II.14)}$$

La solución de la ecuación (II.12) es una función continua en cada punto del espacio, por donde circulan corrientes

espaciales y superficiales con densidades limitadas. Para un contorno lineal por el que pasa una corriente J la condición de frontera se escribe para $r \to 0$ de la siguiente manera

$$\mathbf{A} = \tau \left(\frac{2J}{c} \ln \frac{1}{r} + \text{const} \right),$$

siendo r la distancia más corta entre el punto de observación y el contorno que se examina, y τ el vector tangente al contorno que señala la dirección de la corriente. Si las corrientes están concentradas en una región limitada, el potencial vectorial disminuye, a grandes distancias r de la corriente, conforme a $1/r^2$ o con mayor rapidez. Cuando se busca la solución a la ecuación de Poisson (II.12), hay que valerse de estas observaciones en conjunto con las condiciones de frontera (II.13) y (II.14). Después de hallar de esta manera el potencial vectorial se determina, mediante diferenciación (II.9), la intensidad del campo magnético.

Por otra parte, si se conoce la intensidad H del campo magnético (por ejemplo, se ha obtenido del teorema (II.8)), es fácil hallar el potencial vectorial A a partir de la correlación (II.9) examinándola como una ecuación diferencial respecto a la función que se busca A.

El potencial vectorial e intensidad del campo magnético de corrientes espaciales pueden ser representados como integrales triples

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad \text{(II.15)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV'. \qquad \text{(II.16)}$$

Si la integral triple converge, el potencial vectorial (II.15) es la solución general de la ecuación de Poisson, que satisface las condiciones de frontera (II.13) y (II.14) en la superficie que separa las corrientes y el vacío. Cuando la integral (II.15) diverge o no es posible calcularla analíticamente, el potencial vectorial del campo magnético se halla resolviendo la ecuación de Poisson (II.12) teniendo en cuenta las condiciones de frontera (II.13) y (II.14).

Si la corriente es de línea, las magnitudes A y H se obtienen de la expresión (II.15) y (II.16) mediante la sustitución

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV' \to J\, d\mathbf{l}', \qquad \text{(II.17)}$$

la cual transforma las integrales triples (II.15) y (II.16) en integrales curvilíneas por el eje de un tubo muy fino con corriente de línea J. El elemento dl' del eje de este tubo está orientado en dirección de la corriente J. Después de pasar en la expresión (II.16) a la integral curvilínea se obtiene la fórmula (II.17). En relación con esto la expresión (II.16) se denomina también ley de Biot y Savart.

Para las corrientes de línea, por analogía, hay que sustituir $\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV' \to \mathbf{i}(\mathbf{r}')\,dS'$ en las integrales (II.15) y (II.16).

El potencial vectorial e intensidad del campo magnético a largas distancias r de la región acotada por la cual circulan corrientes cerradas se expresan de la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \tag{II.18}$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}, \tag{II.19}$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es el momento magnético de las corrientes cerradas. En el caso de corrientes espaciales

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\,dV. \tag{II.20}$$

Para las corrientes de línea cerradas la última expresión se transforma

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{J\mathbf{S}}{c}, \tag{II.21}$$

$$\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}. \tag{II.22}$$

Esta integral se calcula para una superficie arbitraria tendida sobre el contorno de un tubo de corriente por el cual pasa la corriente de línea J. El módulo del vector $\mathbf{S}$ es equivalente al área de la superficie de integración más pequeña. Si el contorno del tubo de corriente se encuentra en un plano, la orientación de $\mathbf{S}$ está relacionada con la orientación de la corriente J en el tubo por la regla del sacacorchos.

La energía del campo magnético

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}^2\,dV. \tag{II.23}$$

En caso de corrientes espaciales que circulan por una región limitada del espacio, la energía magnética de las mismas

(11.23) puede calcularse también a base de la fórmula:

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{jA}\, dV. \qquad \text{(II.24)}$$

La energía magnética de interacción entre corrientes que fluyen con densidades espaciales $\mathbf{j}_1$ y $\mathbf{j}_2$ se determina de la siguiente manera:

$$W = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r})\, \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV\, dV'. \qquad \text{(II.25)}$$

La fuerza **F** aplicada a la corriente espacial en el campo magnético exterior con una intensidad **H** se representa

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H})\, dV, \qquad \text{(II.26)}$$

mientras que la energía magnética W de interacción entre dicha corriente y el campo magnético exterior se expresa mediante el potencial vectorial **A** de este campo

$$W = \frac{1}{c} \int \mathbf{jA}\, dV. \qquad \text{(II.27)}$$

Si la intensidad **H** del campo magnético exterior varía poco a lo largo de la región del espacio donde circulan corrientes cerradas, la energía magnética de interacción de estas corrientes con el campo exterior se expresa mediante el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de las mismas

$$W = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}. \qquad \text{(II.28)}$$

En este caso la fuerza **F** y el momento **N** de las fuerzas aplicadas a los puntos en el campo magnético exterior se escriben de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\ \text{grad})\ \mathbf{H} = \text{grad}\ (\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}), \qquad \text{(II.29))}$$

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}. \qquad \text{(II.30)}$$

Las fórmulas (II.29) y (II.30) son análogas a las correspondientes fórmulas (I.36) y (I.37) de la electrostática, en la cual la expresión $-\mathbf{dE}$ representa de por sí la energía potencial del momento dipolar **d** en el campo eléctrico exterior cuya intensidad es **E**. La magnitud física $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$ no es energía potencial en la magnetostática. En relación con esto a veces se introduce la llamada función potencial $U = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$, la cual permite representar la fuerza aplicada al momento magnético en el campo magnético exterior en forma

ordinaria $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$. En la mecánica, en torno a una partícula con momento magnético μ, la magnitud $-\mu\mathbf{H}$ se denomina energía del momento magnético μ en el campo magnético exterior con una intensidad $\mathbf{H}$.

La fuerza espacial total (II.26) puede ser sustituida por un sistema de fuerzas superficiales, aplicadas a la superficie de volumen V, por cuyo interior circulan corrientes con densidad espacial $\mathbf{j}$

$$F_\alpha = \frac{1}{c}\int_V (\mathbf{j}\times\mathbf{H})_\alpha\, dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta\, dS. \qquad (II.31)$$

Aquí $\mathbf{n}$ es el versor de la normal exterior a la superficie cerrada S que limita el volumen V, y $T_{\alpha\beta}$ es el tensor maxweliano de tensión

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\delta_{\alpha\beta}\right). \qquad (II.32)$$

§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en magnetostática

138. ¿Podrá distribuirse la corriente eléctrica por fuera de una región hueca de tal manera que dentro de ésta la intensidad del campo magnético adquiera la forma: a) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$; b) $\mathbf{H} = b\,(z\mathbf{l}_x + x\mathbf{l}_y + y\mathbf{l}_z)$, siendo $b = \text{const}$; c) $\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}$, donde el vector $\boldsymbol{\mu}$ no depende de las coordenadas y tiempo, además el punto con radio vector $\mathbf{r} = 0$ se encuentra fuera de la región hueca?

139. ¿Es posible originar en el espacio una corriente eléctrica continua de densidad especial $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-ar}$, siendo a una constante positiva, y si además dicha densidad no depende del tiempo?

140. Determinar cómo se distribuye en el espacio la densidad $\mathbf{j}$ de la corriente si la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético de la misma tiene la forma de: a) $\mathbf{H} = f(r)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, siendo el vector $\mathbf{a}$ independiente de las coordenadas y tiempo, y $f(r)$ una función arbitraria diferenciable; b) $\mathbf{H} = (\mathbf{ar})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{r})$, donde los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos e independientes de las coordenadas y tiempo; c) $\mathbf{H} = H_r\mathbf{l}_r + H_\theta\mathbf{l}_\theta + H_\varphi\mathbf{l}_\varphi$, donde las componentes del vector $\mathbf{H}$ en

coordenadas esféricas son:

$$H_r = a\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\theta; \quad H_\theta = a\left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\operatorname{sen}\theta,$$

$$H_\psi = 0 \text{ para } r \leqslant R,$$

$$H_r = \frac{2aR^5}{15r^3}\cos\theta; \quad H_\theta = \frac{aR^5}{15r^3}\operatorname{sen}\theta,$$

$$H_\psi = 0 \text{ para } r \geqslant R;$$

d) $\mathbf{H} = H_r\mathbf{l}_r + H_\psi\mathbf{l} + H_z\mathbf{l}_z$, donde las componentes del vector $\mathbf{H}$ en coordenadas cilíndricas son:

$H_r = 0$, $H_\psi = gr$, $H_z = b(R^2 - r^2)$ para $r \leqslant R$,

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{gR^2}{r} \text{ para } r \geqslant R.$$

Aquí a, b, g, R son constantes.

141. Calculando el rotacional y la divergencia de la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético es necesario cerciorarse de que en la magnetostática la expresión

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'$$

satisface las ecuaciones de Maxwell. Aquí $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ es la densidad espacial de la corriente continua en el punto cuyo radio vector es $\mathbf{r}'$ y c la velocidad de la luz en el vacío.

142. Confirmar con cálculos directos que en caso de un campo magnético homogéneo continuo con intensidad $\mathbf{H}$ el potencial vectorial $\mathbf{A}$, si satisface la condición de Lorentz, se puede escribir de la siguiente forma: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \times \mathbf{r})$, donde $\mathbf{r}$ es el radio vector de un punto de observación abritrario.

143. Considerando la densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ de la corriente y sus primeras derivadas como funciones continuas en cada punto de la región que se examina (las corrientes superficiales y de línea están ausentes), confirmar que en la superficie de separación con el vacío la componente normal del vector $\mathbf{j}$ se convierte en cero.

144. Una corriente continua con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ circula en un volumen finito que limita con el vacío. En el interior del volumen dado, incluyendo los puntos de la superficie de separación, la función $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ es continua. Demostrar que $\int \mathbf{j}\,dV = 0$.

145. Demostrar que en magnetostática, si las corrientes circulan por una región finita o decrecen a grandes distancias del punto de observación con una mayor rapidez que $1/(r - r')^2$, la solución general de la ecuación de Poisson

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

satisface la condición de Lorentz.

146. ¿Bajo qué condición la energía del campo magnético $W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}^2 dV$, puede representarse como $W = \frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV$, siendo $\mathbf{A}$ el potencial vectorial del campo magnético de una corriente que fluye con densidad espacial $\mathbf{j}$?

147. Una corriente eléctrica con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ fluye por una región limitada del espacio. Demostrar que la fórmula para la energía magnética de la corriente $W = \frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV$ no varía si se pasa de un potencial vectorial $\mathbf{A}$ a otro nuevo $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f$, donde $f = f(\mathbf{r})$ es una función arbitraria

$$W = \frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}\,dV = \frac{1}{2c}\int \mathbf{jA}'\,dV.$$

148. Determinar cómo se distribuye la densidad superficial de la corriente si la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético homogéneo, engendrado por dicha corriente tiene la forma de: a) el vector $\mathbf{H}$ es paralelo al eje Y en la región entre los planos $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ y es nulo fuera de esta región; b) el vector $\mathbf{H}$ es paralelo al eje Y en el semiespacio $x < a$, antiparalelo al eje Y en el semiespacio $x > b$ $(a < b)$ y nulo entre los planos $x = a$ y $x = b$; c) el vector $\mathbf{H}$ es paralelo en el interior de una superficie cilíndrica al eje de ésta e igual a cero en el exterior.

149. Aplicando las coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, así como de las propiedades de la δ-función, hallar la distribución de la densidad espacial $\mathbf{j}$ de la corriente en el espacio para los casos cuando: a) por una superficie cilíndrica de radio R, fluye paralelamente a su eje una corriente homogénea con densidad superficial $\mathbf{i}_0$; b) una corriente de línea J fluye por el eje Z en dirección positiva; c) una corriente con densidad superficial $\mathbf{i}_0$ pasa por el plano XY; d) una corriente de línea J circula en el plano XY por un anillo infinitamente fino de radio R, formando un sistema a dextrógiro con el eje Z que pasa por el centro del anillo;

e) una superficie esférica de radio R, con carga homogénea y densidad superficial σ, gira en torno a su diámetro con una velocidad angular de rotación ω orientada a lo largo del eje Z; f) la superficie de un cono circular con el vértice en el origen de coordenadas, carga uniforme y densidad superficial σ, gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular ω orientada a lo largo del eje Z (el ángulo sólido del cono contiene la parte positiva del eje Z y equivale a $2\pi (1 - \cos\theta)$).

150. ¿Se podrá crear en el plano YZ una corriente eléctrica continua con una densidad superficial

$$\mathbf{i} = (e^{-ay^2}\mathbf{l}_y + e^{-az^2}\mathbf{l}_z)\, i_0,$$

siendo a y i_0 constantes?

151. Determinar la configuración de una región por la cual circula una corriente, así como el carácter de distribución de esta última por dicha región, si la densidad espacial de la corriente en el espacio ilimitado se expresa, en coordenadas cartesianas por la siguiente función: a) $\mathbf{j} = 2a\mathbf{i}_0\delta\,(x^2 - a^2)$, siendo a constante e $\mathbf{i}_0$ un vector constante paralelo al plano YZ; b) $\mathbf{j} = 2aJ\mathbf{l}_y\delta\,(x^2 - a^2)\delta\,(z)$, donde a y J son constantes.

152. Por un contorno fino cerrado L pasa una corriente J. Demostrar que la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético de la corriente se puede calcular introduciendo el potencial escalar Φ conforme a la fórmula $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\Phi$. Hallar la ecuación y condiciones suplementarias que definen Φ.

153. Determinar el potencial escalar Φ e intensidad $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\Phi$ del campo magnético de una corriente de línea J que fluye a lo largo del eje Z.

§ 2. Momento magnético

154. Las componentes del vector $\mathbf{j}$ de la corriente orbital con densidad espacial media que circula en un átomo de hidrógeno excitado, en coordenadas esféricas, son equivalentes a:

$$j_r = j_\theta = 0 \quad \text{y} \quad j_\varphi = \frac{1}{3^8}\,\frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7}\, e^{-\frac{2r}{3a}} \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta,$$

siendo a el radio de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m y e la masa y carga del electrón, r la distancia hasta el protón. Determinar el momento magnético μ de la corriente orbital.

155. La densidad de la corriente $\mathbf{j}$ está distribuida en el espacio y se describe según la expresión $\mathbf{j} = \text{rot}\,[\mathbf{a}\,F(r)]$ siendo $\mathbf{a}$ un vector constante y $F(r)$ una función que disminuye al infinito con mayor rapidez que $1/r^3$. Expresar el momento magnético μ de la corriente mediante la integral de la función $F(r)$.

156. La densidad de la corriente tiene en el espacio la forma de $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}_0$ unos vectores constantes. Determinar el momento magnético μ de la corriente.

157. El momento magnético interior del electrón en términos de valor absoluto es equivalente al magnetón de Bohr $\mu_0 = \frac{|e|\hbar}{2mc}$, siendo $\hbar$ la constante de Planck, c la velocidad de la luz en el vacío, e y m la carga y masa del electrón. Este último es de por sí, conforme al modelo clásico, una esfera de radio $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ con carga homogénea. Considerando el momento magnético interior como el resultado de rotación del electrón en torno a su eje de simetría, determinar la velocidad angular ω de esta rotación. ¿En cuántas veces variará la velocidad angular de rotación si se admite que la carga e está esparcida uniformemente por la superficie de la esfera?

158. Confirmar que el momento magnético $\mu = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\,dV$ de una corriente que circula en el espacio con densidad $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ no depende de la selección del origen de coordenadas. Se supone que el momento magnético de la corriente tiene un valor finito.

159. Por una región limitada del espacio pasa una corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. La intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético exterior en el interior de esta región es homogénea. Expresar la energía magnética $W = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\mathbf{A}\,dV$ de interacción entre la corriente y el campo magnético exterior, mediante el momento magnético $\mu = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})\,dV$ de la corriente. Aquí $\mathbf{A}$ es el potencial vectorial del campo magnético exterior.

160. Un cilindro de radio R, altura arbitraria y carga homogénea, gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular ω. La carga total del cilindro es equivalente a Q y su eje de rotación forma con la intensidad $\mathbf{H}$ del campo

magnético homogéneo exterior cierto ángulo. Determinar la energía magnética W de interacción entre el cilindro y el campo magnético exterior.

161. Por el interior de una región limitada del espacio pasa una corriente con densidad $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. La intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético exterior en todo el espacio es homogénea. Expresar mediante el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de la corriente el momento $\mathbf{N} = \frac{1}{c}\int (\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H}))dV$ de fuerzas, aplicado a la corriente. Demostrar que el momento de fuerzas no depende de la selección del punto fijo respecto al cual se calcula.

162. Una superficie cilíndrica de radio R y altura h, con carga uniforme y densidad superficial σ gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular ω. El eje de rotación constituye con la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético homogéneo exterior cierto ángulo. Determinar el momento $\mathbf{N}$ de fuerzas aplicado a la superficie cilíndrica.

163. La intensidad $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$ de un campo magnético exterior apenas varía a lo largo de cierta región finita del espacio por donde circulan corrientes con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Desarrollando $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ en serie de Taylor en un punto interior de la región mencionada y menospreciando las derivadas de orden superior, expresar la fuerza

$$F = \frac{1}{c}\int (\mathbf{j} \times \mathbf{H})\, dV,$$

aplicada a la corriente, a partir de su momento magnético $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r} \times \mathbf{j})dV$.

§ 3. Campo magnético a grandes distancias de la corriente

164. Un elipsoide de revolución de semiejes a y b tiene una carga homogénea y gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular constante ω. La carga total del elipsoide equivale a Q y su semieje b descansa en el eje de rotación. Hallar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ e intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético a grandes distancias del elipsoide.

165. La carga Q está distribuida uniformemente por una superficie cónica ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$), que gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular cons-

tante ω. Hallar el potencial vectorial **A** e intensidad **H** del campo magnético a grandes distancias de la superficie cónica.

166 or un tubo de corriente fino que tiene forma de triángulo equilátero de lado a pasa una corriente J. Determinar a grandes distancias r de la corriente la intensidad **H** del campo magnético.

167. A grandes distancias una de otra hay dos superficies esféricas idénticas de radio R, cargadas uniformemente. La carga total de cada superficie esférica equivale a Q y las velocidades angulares en torno a sus ejes de simetría son ω_1 y ω_2. Determinar la energía magnética W de interacción entre las superficies esféricas.

168. La carga Q rellena con homogeneidad el volumen de un cono $(x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h)$ que gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular constante ω. A una distancia considerable r del cono hay una partícula con momento magnético interior μ. Determinar la fuerza **F** aplicada a la partícula.

§ 4. Ley de Biot—Savart

169. La distribución de la densidad de una corriente en el espacio tiene la forma $\mathbf{j} = j(\mathbf{r})\mathbf{l}$, siendo **l** un vector constante y $j(\mathbf{r})$ una función escalar de coordenadas cartesianas. Demostrar que la intensidad del campo magnético de la corriente es en cada punto del espacio perpendicular al vector **l**.

170. El volumen de una esfera de radio R está relleno de una carga homogénea Q. Hallar la intensidad **H** del campo magnético en el centro de la esfera si ésta gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. ¿En cuántas veces variará la intensidad del campo magnético en el centro de la esfera si la carga Q se dispersa uniformemente por su superficie?

171. Una superficie cónica $(x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h)$, cargada uniformemente con una densidad superficial σ gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular constante ω. Hallar la intensidad **H** del campo magnético en el vértice de la superficie cónica.

172. Las componentes del vector **j** de la corriente orbital con densidad espacial media que circula en el átomo de hidró-

geno excitado, son en coordenadas esféricas

$$j_r = j_\theta = 0$$

y

$$j_\varphi = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \operatorname{sen}^3 \theta,$$

siendo a el radio de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m y e la masa y carga del electrón, r la distancia hasta el protón. Esta corriente orbital engendra un campo magnético en el espacio. Hallar la intensiad H de este campo en el origen de coordenadas.

173. La densidad media de carga en la nube electrónica del átomo de hidrógeno es igual a $\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, siendo a el radio de Bohr, r la distancia hasta el protón, e la carga del electrón. Si el átomo se sitúa en un campo magnético homogéneo exterior cuya intensidad es $\mathbf{H}_0$, la nube electrónica comenzará a girar originando en el espacio una corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc}(\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0)$, donde m es la masa del electrón y c la velocidad de la luz en el vacío. ¿Cuál será, como consecuencia de la rotación de la nube electrónica, la magnitud de variación ΔH de la intensidad del campo magnético en el centro del átomo?

174. Una esfera de radio R tiene distribuida por su volumen una carga homogénea Q. Una mitad de la esfera gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular constante ω_1, mientras que la otra gira en sentido contrario con velocidad angular constante ω_2. Hallar la intensidad H del campo magnético en el centro de la esfera compuesta. ¿Qué parte de la carga Q es necesario distribuir con homogeneidad dentro de la primera mitad en rotación y qué parte en la segunda, para que la intensidad del campo magnético en el centro de la esfera sea nula?

175. La densidad de carga en el espacio se expresa por:

$$\rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b} \delta\left(\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right),$$

donde a y b son constantes. Hallar la intensidad H del campo magnético en el origen de coordenadas, si las cargas giran con una velocidad angular constante ω en torno al eje Z. Examinar los casos cuando $a > b$ y $a < b$.

176. Como resultado de la intersección entre una esfera de radio R y una superficie cónica cuyo vértice descansa en el centro de la esfera, se ha obtenido un sector esférico. El ángulo sólido de este último es $2\pi\ (1 - \cos\theta_0)$ y su volumen está relleno con una carga Q homogénea. Determinar la intensidad H del campo magnético en el vértice del sector esférico, si este último gira con una velocidad angular constante ω alrededor de su eje de simetría.

177. Un cono ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$) gira alrededor de su eje de simetría con una velocidad angular constante ω y contiene distribuida en su interior una carga uniforme Q. En el vértice del cono hay una partícula con momento magnético interior μ. Determinar la energía magnética W de interacción entre la partícula y el cono en rotación.

178. Las componentes del vector j de la corriente orbital con densidad espacial media que circula en el átomo de hidrógeno excitado, en coordenadas esféricas, son:

$$j_r = j_\theta = 0$$

y

$$j_\psi = \frac{e\hbar r}{64\pi m a^6}\, e^{-\frac{r}{a}} \operatorname{sen}\theta,$$

siendo a el radio de Bohr, $\hbar$ la constante de Planck, m y e la masa y carga del electrón, r la distancia hasta el protón con un momento magnético interior μ, orientado por el eje Z. Determinar la energía magnética W de interacción entre el momento magnético del protón y la corriente orbital. Este problema describe en el átomo de hidrógeno la interacción spin-órbita entre el protón y el electrón, ya que la corriente orbital está condicionada por el movimiento del electrón y el momento magnético interior está ligado a su spin.

179. La densidad espacial media de la corriente en el átomo de hidrógeno, condicionada por el spin del electrón, se expresa por

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot}[\mu_0 F(r)], \quad \text{donde} \quad F(r) = \frac{1}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Aquí a es el radio de Bohr, c la velocidad de la luz en el vacío, r la distancia hasta el protón y μ_0 el momento magnético interior del electrón. Hallar la intensidad H del campo magnético en el centro del átomo de hidrógeno. Determinar la energía magnética W de interacción entre el protón

y el campo magnético hallado, tomando en consideración el momento magnético interior del protón μ. Puesto que los momentos magnéticos internos de las partículas están ligados con sus spines, la magnitud de W caracteriza la interacción spin-spin del electrón con el protón en el átomo de hidrógeno.

180. Un elipsoide de revolución de semiejes a y b ($a < b$), con una carga homogénea Q distribuida por todo su volumen, gira con una velocidad angular constante ω en torno a su eje de simetría que pasa a lo largo del semieje b. En el centro del elipsoide se encuentra una partícula con momento magnético interior μ. Determinar el momento $\mathbf{N}$ de fuerzas, aplicado a la partícula.

181. Un disco infinitamente fino de radio R, cargado uniformemente con densidad superficial σ, gira en torno a su eje con una velocidad angular constante ω. Valiéndose de la fórmula general

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS',$$

hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en el eje del disco. Aquí $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$ es la densidad superficial de la corriente engendrada por el disco en rotación. Investigando la intensidad del campo magnético a grandes distancias del disco, determinar el momento magnético μ del mismo. Obtener igualmente, mediante cálculos directos el momento magnético por la fórmula

$$\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{i})\, dS.$$

182. La densidad de la corriente en el espacio, expresada mediante la δ-función, tiene la forma

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}_0$ son vectores constantes. Hallar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ e intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético. Investigando las expresiones obtenidas, determinar el sentido físico del vector $\mathbf{a}$.

183. En la nube electrónica de un átomo de hidrógeno cada unidad de volumen tiene su momento magnético condicionado por el spin de electrón. La distribución de la densidad del momento magnético se expresa por la función $\mu_0 F(r)$, donde μ_0 es el momento magnético interno del electrón y $F(r)$ la densidad de la nube electrónica a una distancia r del protón. La función $F(r)$ decrece en el infinito más rápida-

mente que $1/r$. Demostrar que esta distribución de la densidad del momento magnético crea en el espacio un campo magnético idéntico al que origina la corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} [\mu_0 F(r)]$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

184. Por un tubo de corriente fino que forma un ángulo recto se transporta una corriente J. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en dos casos: a) en el eje X que es la prolongación de uno de los lados del ángulo recto; b) en el eje Y que pasa por el vértice del ángulo recto perpendicular a las líneas de corriente.

185. Una corriente de línea J fluye por el eje X desde el infinito al origen de coordenadas, alejándose posteriormente en dirección positiva del eje Z al infinito. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en los puntos de la bisectriz del ángulo recto por cuyos lados fluye la corriente mencionada.

186. Por un tubo fino de corriente que posee forma de triángulo equilátero con lado a circula una corriente J. Hallar la intensiad $\mathbf{H}$ del campo magnético en la cúspide del triángulo.

187. Por un tubo fino de corriente que tiene forma de cuadrado con lado $2a$ circula una corriente J. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en el eje que pasa por el centro del cuadrado perpendicular a su plano. Investigando la expresión obtenida a grandes distancias del cuadrado, determinar el momento magnético μ de la corriente.

188. Por un tubo fino de corriente, recto e infinito, que en un lugar determinado tiene una curvatura local en forma de semicircunferencia de radio R fluye una corriente J. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en el centro de curvatura de la mencionada semicircunferencia.

189. Por un anillo fino de radio R circula una corriente J. Aplicando la ley de Biot y Savart hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en el eje del anillo, expresándola mediante el momento magnético μ de la corriente.

§ 5. Teorema sobre la circulación de la intensidad del campo magnético

190. Por el interior de un cilindro infinito de radio R, paralelamente a su eje, fluye una corriente con densidad espacial homogénea $\mathbf{j}$. Valiéndose del teorema sobre la circu-

lación de la intensidad del campo magnético, hallar el valor de H dentro y fuera del cilindro. Determinar el potencial vectorial A del campo magnético mediante la correlación $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Admitir, durante la calibración del potencial vectorial, que éste en la superficie del cilindro se convierte en cero.

191. En el interior de un cilindro infinito de radio R, la densidad espacial de la corriente tiene simetría axial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$, donde la función vectorial $\mathbf{j}(r)$ es constante en orientación y arbitrariamente depende de la distancia r hasta el eje del cilindro. Empleando el teorema sobre la circulación de la intensidad del campo magnético, hallar el valor de H dentro y fuerza del cilindro. Determinar el potencial vectorial A mediante la correlación $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, admitiendo, que dicha función A en la superficie del cilindro se convierte en cero.

192. Una corriente J está distribuida con homogeneidad por la sección de un cilindro infinito de radio R. Hallar, utilizando el tensor maxweliano de tensión, la fuerza F con que se aprietan mutuamente dos mitades idénticas del cilindro. Aquí F es la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud de una de las mitades del cilindro. Confirmar, utilizando la fuerza espacial y cálculos independientes el resultado obtenido.

193. Una corriente con densidad superficial homogénea $\mathbf{i}_0$ fluye por una superficie cilíndrica infinita de radio R, paralelamente a su eje. Hallar la intensidad H del campo magnético sin recurrir al potencial vectorial.

194. Por el plano XY, paralelamente al eje X fluye una corriente con densidad superficial homogénea $\mathbf{i}_0$. Hallar la intensidad H del campo magnético sin recurrir al potencial vectorial.

195. Por el espacio entre dos superficies cilíndricas coaxiales de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) circula una corriente con densidad espacial j, que con relación a la sección del tubo de corriente es homogénea y paralela a su eje. Hallar la intensidad H del campo magnético en cada punto del espacio.

196. Una corriente homogénea con densidad espacial j fluye por el interior de una lámina ilimitada paralelamente a sus superficies $z = l$ y $z = -l$. Determinar, sin recurrir al potencial vectorial, la intensidad H del campo magnético dentro y fuera de la lámina si las líneas de corriente son paralelas al eje Y.

197. A lo largo de una recta ($x = l$, $y = 0$) paralelamente al eje Z fluye una corriente J. Por otra recta ($x = -l$, $y = 0$) fluye otra corriente antiparalela de la misma magnitud. Hallar la intensidad **H** del campo magnético. Investigar **H** a grandes distancias de las corrientes dadas.

198. Un marco cuadrado de lado a se encuentra en un mismo plano que la corriente lineal directa J. ¿A qué distancia r de la corriente se encuentra el lado más cercano del marco si el flujo del campo magnético a través de la superficie del marco es equivalente a Φ_0?

199. Una corriente lineal directa J_1 se encuentra en el mismo plano que la corriente J_2 que circula por un marco fino cuadrado de lado a. El lado del marco más cercano a la corriente J_1 está a una distancia r y su corriente coincide en dirección. ¿A qué equivale la fuerza **F** aplicada al marco?

200. Por el plano $z = l$, paralelamente al eje Y, fluye una corriente con densidad superficial homogénea $\mathbf{i}_0$. Por otro plano $z = -l$ circula otra corriente antiparalela de la misma magnitud. Hallar la intensidad **H** del campo magnético en cada punto del espacio. ¿Qué aspecto tomará el vector **H**, si las corrientes en los dos planos son paralelas al eje Y?

201. Por el eje Z, desde un punto infinitamente lejano $z = -\infty$, fluye hacia el origen de coordenadas una corriente de línea J. A partir del origen de coordenadas esta corriente se dispersa uniformemente en todas direcciones por el plano XY. Determinar la intensidad **H** del campo magnético en todos los puntos del espacio y comprobar cómo se cumplen para el vector **H** las condiciones de frontera al traspasar el plano de coordenadas XY. Representar el vector **H** en forma de suma de dos sumandos $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, condicionados respectivamente por las corrientes de línea y superficial.

202. Una corriente de línea J que comienza en un punto infinitamente lejano $z = -\infty$ se transporta por el eje Z en dirección positiva. En el punto $z = -R$ esta corriente se dispersa por la superficie de una esfera homogénea de radio R que tiene el centro en el origen de coordenadas y a continuación de nuevo se concentra en el punto $z = R$ diametralmente opuesto, continuando su circulación a lo largo de la parte restante del eje Z. Determinar la intensidad **H** del campo magnético en el espacio y comprobar para el vector **H** el cumplimiento de las condiciones de frontera al traspasar la esfera señalada.

203. Partiendo de la ley de Biot y Savart

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

obtener la correlación $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J$. Aquí L es un contorno de integración arbitrario, coherente al contorno de corriente L', y $\mathbf{H}$ la intensidad del campo magnético de la corriente J.

204. En el espacio comprendido entre dos superficies cilíndricas infinitas (no coaxiales) de radios R_1 y R_2 ($R_1 + l < R_2$) paralelamente a sus ejes fluye una corriente homogénea con densidad espacial $\mathbf{j}$. La distancia entre los ejes de las superficies cilíndricas es l. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético en el interior de la cavidad cilíndrica de radio R_1.

205. Dos láminas ilimitadas e infinitamente finas se encuentran en el plano XZ y están divididas entre sí por una rendija de anchura a. La línea central de la rendija coincide con el eje Z. Paralelamente a este eje por las láminas fluye una corriente de densidad superficial homogénea $\mathbf{i}_0$. Hallar la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético a grandes distancias $r \gg a$ de la rendija teniendo en cuentra los miembros de orden $1/r$.

206. Un cilindro infinito de radio R_1 se encuentra no coaxialmente en el interior de otro cilíndro de radio R_2. A lo largo de los cilindros fluyen corrientes homogéneas y antiparalelas con densidades espaciales $\mathbf{j}_1$ y $\mathbf{j}_2$ respectivamente. La corriente del cilindro exterior no penetra en el interior. La distancia entre los ejes paralelos de estos cilindros infinitos es l. Hallar la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada a la unidad de longitud del cilindro interior.

207. Determinar la magnitud $W = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2 \, dV$ por unidad de longitud de los cilindros descriptos en el problema anterior. Aquí $\mathbf{A}_2$ es el potencial vectorial del campo magnético de la corriente $\mathbf{j}_2$. Hay que admitir, para obtener un resultado unívoco, que el potencial vectorial engendrado por las corrientes de cada cilindro homogéneo continuo es nulo en su superficie. Cerciorarse de que la fuerza aplicada a la unidad de longitud del cilíndro interior, en términos de su valor absoluto, es equivalente a $F = \frac{\partial W}{\partial l}$.

§ 6. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias

208. Dos componentes del potencial vectorial, en coordenadas esféricas, resultan nulas $A_r = A_0 = 0$, mientras que la tercera tiene la forma

$$A_\psi = ar\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right) \operatorname{sen}\theta \quad \text{para } r \leqslant R$$

y

$$A_\psi = \frac{2aR^5}{15r^2} \operatorname{sen}\theta \qquad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo a y R constantes. Hallar la distribución de la densidad espacial j de la corriente que ha originado un campo magnético con el potencial vectorial mencionado.

209. Dos componentes del potencial vectorial, en coordenadas cilíndricas, son nulas $A_r = A_z = 0$, mientras que la tercera tiene la forma

$$A_\psi = ar\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right) \quad \text{para } r \leqslant R$$

y

$$A_\psi = \frac{aR^4}{2r} \qquad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo a y R constantes. Hallar la distribución de la densidad espacial j de la corriente que ha engendrado un campo magnético con el potencial vectorial mencionado.

210. Dos componentes del potencial vectorial, en coordenadas esféricas, son iguales a cero $A_r = A_0 = 0$, mientras que la tercera tiene la forma

$$A_\psi = ar \operatorname{sen}\theta \qquad \text{para } r \leqslant R$$

y

$$A_\psi = \frac{aR^3}{r^2} \operatorname{sen}\theta, \quad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo a y R constantes. Hallar la distribución de la densidad superficial i de la corriente que ha originado un campo magnético con el potencial vectorial mencionado.

211. La transición de un potencial vectorial A (r) a otro nuevo A′ (r) = A (r) + grad f, donde $f = f$ (r) es una función arbitraria de las coordenadas, no modifica la intensidad del campo magnético estacionario. ¿Qué condición debe

satisfacer la función $f(\mathbf{r})$ para que la transición a un potencial vectorial nuevo tampoco altere la condición de Lorentz en magnetostática?

212. La densidad en el espacio varía de un punto a otro acorde con la ley periódica $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}$, donde los vectores constantes $\mathbf{j}_0$ y $\mathbf{k}$ satisfacen la correlación $\mathbf{kj}_0 = 0$. Hallar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ e intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético originados por esta corriente en un espacio infinito.

213. La densidad espacial de la corriente tiene en un semiespacio $z \leqslant 0$ una estructura periódica $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}$, donde los vectores constantes $\mathbf{j}_0$ y $\mathbf{k}$ satisfacen la correlación $\mathbf{kj}_0 = 0$, además el vector $\mathbf{j}_0$ es paralelo al plano XY y las tres componentes del vector $\mathbf{k}$ se diferencian de cero. Hallar en cada punto del espacio el potencial vectorial $\mathbf{A}$ del campo magnético.

214. Una corriente con densidad superficial $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cos \mathbf{lr}$ fluye por el plano XY. Aquí $\mathbf{i}_0$ y $\mathbf{l}$ son vectores constantes, se encuentran en el plano señalado y satisfacen la correlación $\mathbf{li}_0 = 0$. Hallar en cada punto del espacio el potencial vectorial $\mathbf{A}$ del campo magnético.

215. Por los planos cartesianos XY, XZ e YZ fluyen corrientes superficiales de densidad $\mathbf{i}_1 = \mathbf{a}_1 \cos \mathbf{l}_1\mathbf{r}$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{a}_2 \cos \mathbf{l}_2\mathbf{r}$ e $\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_3 \cos \mathbf{l}_3\mathbf{r}$ respectivamente. Los vectores constantes $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ y $\mathbf{l}_3$ satisfacen la condición $\mathbf{a}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{a}_2\mathbf{l}_2 = \mathbf{a}_3\mathbf{l}_3 = 0$ y se encuentran respectivamente en los planos XY, XZ e YZ. Hallar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ del campo magnético en cada punto del espacio.

216. Por el interior de una placa infinita, limitada por los planos $x = a$ y $x = -a$, fluye una corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y$, donde el vector constante $\mathbf{j}_0$ es paralelo al eje Z. Hallar dentro y fuera de la placa el potencial vectorial $\mathbf{A}$ del campo magnético.

217. Por el interior de un cilindro infinito de radio R paralelamente a su eje fluye una corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 r^s \cos n\psi$, siendo r la coordenada cilíndrica, ψ el ángulo polar. El eje Z coincide con el eje del cilindro. El número n, positivo y entero, así como la constante s satisfacen la condición $n^2 \neq (s+2)^2$. Hallar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ del campo magnético dentro y fuera del cilindro.

218. La densidad espacial de la corriente, en coordenadas cilíndricas, tiene la forma de

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para } r \leqslant R$$

y

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para } r \geqslant R,$$

siendo $\mathbf{j}_0$ un vector constante y paralelo al eje Z, R una constante y n un número entero, positivo y mayor de la unidad. Hallar el potencial vectorial **A** del campo magnético en cada punto del espacio.

219. Un cilindro infinito de radio R, cargado uniformemente con una densidad espacial ρ, gira en torno a su eje con una velocidad angular constante ω. Hallar el potencial vectorial **A** e intensidad **H** del campo magnético dentro y fuera del cilindro.

220. Por el interior de un cilindro infinito de radio R paralelamente a su eje fluye una corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$, donde r es la distancia hasta el eje del cilindro. Valiéndose de la ecuación para el potencial vectorial **A**, hallar su valor dentro y fuera del cilindro. El sumando constante arbitrario del potencial vectorial deberá elegirse de tal manera que el valor de **A** se convierta en la superficie del cilindro en cero.

221. Una esfera de radio R, cargada uniformemente con una densidad espacial ρ, gira en torno a su eje de simetría con una velocidad angular constante ω. Hallar el potencial vectorial **A** e intensidad **H** del campo magnético dentro y fuera de la esfera. Expresar **A** y **H** en la región exterior de la esfera mediante su momento magnético μ.

222. Empleando el tensor maxweliano de tensión y los resultados del problema anterior, determinar la fuerza magnetostática **F** con que actúa una mitad de la esfera sobre la otra en dirección del eje de rotación.

223. Una corriente con densidad superficial $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cos m\psi$ fluye por una superficie cilíndrica infinita de radio R, paralelamente a su eje. Aquí n es un número entero ($n > 1$), y ψ el ángulo polar. El eje Z coincide con el eje de la superficie cilíndrica y está orientado en la misma dirección que el vector constante $\mathbf{i}_0$. Hallar el potencial vectorial **A** e intensidad **H** del campo magnético en cada punto del espacio.

224. Una superficie cilíndrica infinita de radio R está contorneada por una corriente con densidad superficial homogénea $\mathbf{i}_0$. El vector $\mathbf{i}_0$ es paralelo al eje de la superficie. Aplicando la ecuación para el potencial vectorial determinar el valor de **A** en el interior y exterior de la superficie

cilíndrica. Además hallar la intensidad H del campo magnético en cada punto del espacio.

225. Una superficie cilíndrica e infinita de radio R, cargada uniformemente con densidad superficial σ, gira en torno a su eje con velocidad angular constante ω, desplazándose al mismo tiempo a lo largo de su eje con una velocidad v. Hallar el potencial vectorial A e intensidad H del campo magnético en cada punto del espacio.

226. Una superficie esférica de radio R, uniformemente cargada con densidad superficial σ, gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. Hallar el potencial vectorial A e intensidad H del campo magnético en un punto arbitrario del espacio. Investigando las expresiones obtenidas determinar el momento magnético μ de la esfera en rotación. Obtener, igualmente, con cálculos directos el momento magnético, utilizando la fórmula $\mu = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r} \times \mathbf{i})\, dS$, donde i es la densidad superficial de la corriente originada por la esfera en rotación.

227. Por una superficie cilíndrica e infinita de radio R fluye una corriente con densidad superficial $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1$ para $0 < \psi < \pi$ e $\mathbf{i} = \mathbf{i}_2$ para $\pi < \psi < 2\pi$, siendo $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ vectores constantes y ψ el ángulo polar. Aquí también, el eje Z coincide con el eje de la superficie cilíndrica y es paralelo a los vectores $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$. Hallar el potencial vectorial A del campo magnético en el interior y exterior de la superficie cilíndrica.

§ 7. Energía del campo magnético

228. Las componentes H_r, H_θ y H_ψ de la intensidad del campo magnético H, en coordenadas esféricas, son:

$$H_r = b\left(\frac{R^3}{3} - \frac{r^2}{5}\right)\cos\theta, \quad H_\theta = b\left(\frac{2r^3}{5} - \frac{R^2}{3}\right)\operatorname{sen}\theta,$$

$$H_\psi = 0 \quad \text{para } r < R$$

y

$$H_r = \frac{2bR^5}{15r^3}\cos\theta, \quad H_\theta = \frac{bR^5}{15r^3}\operatorname{sen}\theta, \quad H_\psi = 0 \text{ para } r > R,$$

donde b y R son constantes. Valiéndose de la correlación $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ y condición suplementaria $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, determinar el potencial vectorial A del campo magnético. Hallar la

distribución de la densidad espacial j de la corriente y calcular la energía W del campo magnético de dos maneras empleando las fórmulas (II.23) y (II.24).

229. Determinar la energía W del campo magnético de una superficie esférica de radio R, cargada uniformemente y que gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. La carga total de la esfera es Q. Expresar, por el momento magnético μ de la esfera la energía W.

230. Determinar la energía W del campo magnético de una esfera de radio R, cargada con homogeneidad y que gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. La carga total es equivalente a Q. Expresar, mediante el momento magnético μ de la esfera en rotación, la energía W.

231. Determinar la energía W del campo magnético correspondiente a la unidad de longitud de un cilindro infinito de radio R, cargado con homogeneidad y que gira en torno a su eje con una velocidad angular constante ω. La carga por unidad de longitud es equivalente a q. Expresar, mediante el momento magnético μ de la unidad de longitud del cilindro en rotación, la energía W.

232. Determinar la energía W del campo magnético correspondiente a la unidad de longitud de una superficie cilíndrica infinita de radio R, cargada uniformemente con una densidad superficial σ y que gira en torno a su eje con una velocidad angular ω. Expresar, mediante el momento magnético μ de la unidad de longitud de la superficie cilíndrica en rotación, la energía W.

233. Determinar la energía W del campo magnético correspondiente a la unidad de longitud de la superficie cilíndrica descripta en el problema 223.

234. Por una de las mitades de una superficie cilíndrica infinita de radio R paralelamente a su eje circula una corriente con densidad superficial i, mientras que por la otra en sentido contrario fluye otra corriente de la misma magnitud. Determinar la energía W del campo magnético, correspondiente a la unidad de longitud de la superficie cilíndrica.

235. A lo largo de un cilindro infinito de radio R fluye una corriente homogénea J. Por otro cilindro, también infinito y del mismo radio, fluye otra corriente antiparalela de la misma magnitud. Determinar el potencial vectorial A y la intensidad H del campo magnético a grandes distancias de los cilindros. ¿Será finita la energía del campo magnético correspondiente a la unidad de longitud de tal sistema?

Capítulo III CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIABLE

Las intensidades de los campos eléctrico E y magnético H satisfacen en el caso general las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{III.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{III.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{III.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{III.4}$$

siendo ρ y $\mathbf{j}$ la distribución de las densidades de carga y de corriente en el espacio.

Las cargas puntuales e_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ que se mueven con velocidades $\mathbf{v}_i$ originan una distribución de la densidad de carga y de corriente en el espacio con arreglo a las fórmulas:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \tag{III.5}$$

donde $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ es el radio vector de la i-ésima carga. La función $\mathbf{r}_i(t)$ se prefija en cada caso por separado, o se halla resolviendo la ecuación de movimiento.

De las ecuaciones (III.2) y (III.3) se deduce la ecuación de continuidad

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{III.6}$$

la cual integrada respecto al volumen nos da el principio de conservación de la carga

$$\oint_S \mathbf{j}\, dS = -\frac{dQ}{dt}. \tag{III.7}$$

Aquí Q es la carga total dentro de una superficie cerrada S que limita el volumen dado.

A veces, el desarrollo del campo electromagnético en integral de Fourier contiene solamente las componentes con pequeñas frecuencias $\omega \ll \frac{c}{L}$, donde L es la máxima dimensión lineal de la región que es examina del espacio. Semejante campo electromagnético que varía lentamente dentro de la región dada se denomina cuasiestacionario. Este se expresa por las ecuaciones de Maxwell (III.1)—(III.4), en las cuales los sumandos $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ y $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ se suprimen (lo que es equivalente a menospreciar los efectos relacionados con la velocidad finita de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el interior de la región citada). Por ejemplo, un sistema de cargas e_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) que se mueven en el interior de un volumen de máxima dimensión lineal l, con velocidades no relativistas $v_i \ll c$ origina en el vacío un campo electromagnético con frecuencias en el intervalo $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{v_i}{l}$. Este campo es cuasiestacionario en una amplia región del espacio de longitud $L \ll \frac{c}{v} l$, donde v es la velocidad máxima de estas cargas.

El potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e intensidad $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ de un campo magnético cuasiestacionario se expresa por las mismas ecuaciones que en la magnetostática, mientras que el tiempo t figura en éstas en calidad de parámetro. Por analogía, el potencial escalar $\varphi(\mathbf{r}, t)$ e intensidad $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ del campo eléctrico en una región cuasiestacionaria se definen lo mismo que en la electrostática. En particular a grandes distancias $l \ll r \ll \frac{c}{v} l$ del sistema cargado con dimensión lineal máxima l son válidas las fórmulas (I.14), (II.18) y (II.19), en las cuales los manantiales del campo dependen del tiempo t como de un parámetro.

El momento dipolar, tensor del momento cuadripolar y momento magnético de un sistema de cargas en movimiento

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i; \quad D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}), \qquad \text{(III.8)}$$

$$\mu = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} e_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i), \qquad \text{(III.9)}$$

donde el radio vector $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ y la velocidad $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t)$ de una i-ésima carga son funciones del tiempo.

Los campos electromagnéticos que se propagan en el vacío en ausencia de cargas y corrientes se denominan ondas electromagnéticas. Éstas se expresan por las ecuaciones homogéneas de Maxwell, las cuales, en un espacio libre, se reducen a dos ecuaciones independientes de ondas

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(III.10)}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{(III.11)}$$

De estas ecuaciones se eligen solamente aquellas soluciones que satisfacen igualmente las ecuaciones homogéneas de Maxwell.

Las investigaciones de las ondas electromagnéticas en el vacío se realiza mediante potenciales electromagnéticos que se eligen de una forma tal para la cual el potencial escalar sea igual a cero $\varphi = 0$, y el potencial vectorial $\mathbf{A}$ satisfaga la ecuación de onda

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(III.12)}$$

y la condición suplementaria

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \qquad \text{(III.13)}$$

Entonces las intensidades de los campos eléctrico y magnético de la onda electromagnética se expresan mediante el potencial vectorial de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad \text{(III.14)}$$

Las ondas electromagnéticas que se caracterizan mediante el potencial vectorial

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right), \quad \mathbf{nA} = 0, \qquad \text{(III.15)}$$

se denominan ondas planas. Estas se propagan en dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ con la velocidad c.

Las intensidades de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ de la onda plana son equivalentes por el módulo $E = H$ y componen con el vector $\mathbf{n}$ una terna a dextrógiro

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \qquad \text{(III.16)}$$

La densidad del flujo de la energía electromagnética $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ y densidad del impulso $\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{s}$ del campo electromagnético están vinculados con la densidad de la energía $w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ en la onda plana por las correlaciones

$$\mathbf{s} = cw\mathbf{n}, \qquad \mathbf{g} = \frac{1}{c} w\mathbf{n}. \tag{III.17}$$

Las ondas electromagnéticas en las cuales la dependencia respecto del tiempo t es expresa por una simple función periódica de forma $\cos(\omega t + \alpha)$ se denominan monocromáticas. La magnitud ω representa de por sí la frecuencia cíclica (o simplemente frecuencia) de estas ondas. Un caso particular importante de estas ondas es la onda plana monocromática.

La intensidad del campo eléctrico de una onda plana monocromática resulta útil representar como la parte real de una expresión compleja

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}], \tag{III.18}$$

donde $(\mathbf{kr} - \omega t)$ es la fase de la onda, $\mathbf{k}$ el vector de ésta $(k = \omega/c)$, ω la frecuencia cíclica (o simplemente frecuencia) de la misma y $\mathbf{E}_0$ un vector complejo que satisface la condición $\mathbf{E}_0\mathbf{k} = 0$ de periodicidad transversal de las ondas electromagnéticas en el vacío. El módulo del vector $\mathbf{E}_0$ está vinculado con la amplitud de la onda. Estos mismos razionamientos son válidos para la intensidad del campo magnético.

Del vector $\mathbf{E}_0$ separan el factor complejo $e^{-i\alpha}$ de tal manera

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{-i\alpha}, \tag{III.19}$$

que el cuadrado del vector

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2, \tag{III.20}$$

así como los propios vectores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ sean magnitudes reales. Para esto tiene que observarse la condición $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$. Además, los vectores reables $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son perpendiculares al vector de onda $\mathbf{k}$, que indica la dirección de propagación de la onda (III.18).

Si el eje X se elige a lo largo del vector $\mathbf{b}_1$ y el eje Z en dirección de la propagación de la onda, las proyecciones de la

intensidad del campo eléctrico (III.18) se escribirán así:

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad E_y = \pm b_2 \operatorname{sen}(\omega t - kz + \alpha). \tag{III.21}$$

Las magnitudes variables E_x y E_y satisfacen la ecuación

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \tag{III.22}$$

De aquí se desprende que el extremo del vector de la intensidad del campo eléctrico describe en cada punto del espacio una elipse, la cual se encuentra en el plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Tales ondas se denominan polarizadas elípticamente. Los signos + y — delante del coeficiente b_2 en la fórmula (III.21) corresponden a las polarizaciones derecha e izquierda.

En el caso cuando $b_1 = b_2 = b$, la elipse se convierte en circunferencia y entonces la onda (III.18) se denomina polarizada circularmente o circular. La magnitud b es la amplitud de esta onda y numéricamente es equivalente al módulo de la intensidad del campo eléctrico.

Cuando uno de los vectores $\mathbf{b}_1$ o $\mathbf{b}_2$ se convirte en cero la onda se denomina polarizada linealmente (polarizada en el plano). Esta se escribe en una de las dos formas

$$\mathbf{E} = \mathbf{l} E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \tag{III.23}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{l} E_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t - \alpha)}, \tag{III.24}$$

donde $\mathbf{l}$ es el vector unitario de polarización, E_0 la amplitud, α el desfasaje constante. Solamente la parte real o imaginaria de la expresión compleja (III.24) tiene sentido físico.

Cuando la longitud de onda es infinitesimal, en el caso ideal, la propagación de las ondas electromagnéticas se caracteriza por las leyes de la óptica geométrica. Si no se puede examinar la longitud de onda como infinitesimal, se observan desviaciones respecto a la óptica geométrica, y entonces, los fenómenos específicos que surgen en la propagación de las ondas se denominan difracción. Este fenómeno conduce, por ejemplo, al difuminado del límite brusco entre la luz y la sombra detrás de un cuerpo opaco (pantalla), que se encuentra en el camino de propagación de la luz. Los fenómenos de difracción se diferencian notablemente entre sí en función de las distancias desde el manantial de radiación y el punto de observación hasta la pantalla.

Cuando el manantial de radiación de ondas electromagnéticas o el punto de observación, o bien uno y otro, se encuentran a una distancia finita de la pantalla, el fenómeno difractivo que surge se denomina difracción de Fresnel.

Si el manantial de radiación de ondas electromagnéticas y el punto de observación se encuentran a grandes distancias (infinitas) de la pantalla, entonces tiene lugar la difracción de Fraunhofer.

Esta última se observa en un caso particularmente interesante para su aplicación práctica que resulta cuando la onda electromagnética plana encuentra durante su recorrido una pantalla plana. Las ondas difractadas que surgen pueden ser fácilmente determinadas con aproximación limitándose a pequeñas desviaciones respecto a la óptica geométrica, o sea, a pequeños ángulos entre las direcciones de propagación de las ondas difractada e incidente. A continuación se examina solamente este simplísimo caso.

Supongamos que una pantalla plana coincide con el plano XY y tiene un orificio de área S. Sobre éste incide una onda plana monocromática, que la expresamos en forma compleja (III.24). Designemos mediante u cualesquiera de las componentes de los vectores E y H de esta onda sin el factor de tiempo $e^{-i\omega t}$. En virtud de que las alteraciones respecto a la óptica geométrica son insignificantes, el campo es, en los puntos del orificio, el mismo que en ausencia de la pantalla, o sea, se describe con la magnitud $u = u_0$ tomada en los puntos del orificio. Esto mismo se puede expresar con otras palabras: el campo de una onda difractada coincide en los puntos del orificio de la pantalla con el campo de la onda plana incidente. En los puntos de la pantalla el campo difractado es nulo.

En las suposiciones señaladas la componente de Fourier de la onda difractada, examinada en los puntos del orificio de la pantalla, se escribe en forma de integral doble.

$$u_{\mathbf{q}} = \int_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dx\, dy, \qquad \text{(III.25)}$$

donde la integración se efectúa respecto a la superficie del orificio de la pantalla. El vector $\mathbf{q}$ se encuentra en el plano XY y está relacionado por la correlación $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ con los vectores de onda $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$ de las ondas incidente y difractada ($k = k' = \omega/c$). El ángulo θ entre los vectores de onda $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}'$ se denomina ángulo de difracción. Puesto que los

ángulos de difracción son insignificantes $\theta \ll 1$, el módulo del vector q se expresa mediante la frecuencia de la onda incidente de la siguiente manera:

$$q = \frac{\omega}{c}\theta. \qquad \text{(III.26)}$$

El valor medio de la distribución angular de la intensidad de la onda difractada respecto al tiempo de un período de oscilación

$$dI = \frac{I_0}{S}\left|\frac{u_q}{u_0}\right|^2 \frac{dq_x\, dq_y}{(2\pi)^2} = \frac{I_0}{S}\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_q}{u_0}\right|^2 d\Omega. \qquad \text{(III.27)}$$

En esta fórmula S es el área del orificio en la pantalla, $d\Omega = \theta d\theta d\psi$ un elemento del ángulo sólido, I_0 el valor medio respecto al tiempo de la intensidad total de la onda plana monocromática incidente que pasa por el orificio perpendicularmente al plano de la pantalla.

Detrás de la pantalla, las ondas difractadas también pueden determinarse resolviendo la ecuación de onda con las respectivas condiciones de frontera en la superficie de la primera y en los puntos de su orificio.

Dos pantallas se denominan suplementarias respecto una de otra, si una de ellas tiene un orificio allí donde la otra es opaca y viceversa. Para estas pantallas es justo el principio de Babinet: las pantallas suplementarias crean equivalentes distribuciones de intensidad de la luz difractada.

§ 1. Ecuaciones de Maxwell

236. ¿Podrá, dentro de una región vacía, existir un campo eléctrico variable en tiempo sin que se engendre un campo magnético?

237. ¿Podrá un campo magnético variable en tiempo existir sin otro eléctrico?

238. ¿Podrá haber un campo eléctrico homogéneo existiendo un campo magnético variable en tiempo?

239. ¿Podrá un campo eléctrico homogéneo (o magnético) ser variable en tiempo?

240. Al deducir el principio de conservación de la energía electromagnética como corolario de las ecuaciones de Maxwell, por lo general, la expresión $\frac{c}{4\pi}$ (H rot E— E rot H) se sustituye por div s, donde $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ es el vector

de Poynting. Demostrar que s no es el único vector cuya divergencia es equivalente a la expresión señalada.

241. Las componentes del vector de intensidad del campo magnético en el espacio libre tienen, en coordenadas cilíndricas, la forma $H_r = H_\varphi = 0$ y $H_z = H(r, t)$, donde la función $H(r, t)$ y sus derivadas están limitadas. Determinar la intensidad E del campo eléctrico rotacional inducido por el campo magnético mencionado.

242. Una carga Q y masa m rellenan con homogeneidad el volumen de una esfera. En el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$ se conecta un campo magnético exterior con intensidad $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$, la cual no varía en dirección y satisface la condición inicial $\mathbf{H}(0) = 0$. La dependencia del vector H con relación a las coordenadas en los límites de la esfera se puede menospreciar. Bajo la influencia del campo magnético la esfera comienza a girar. Menospreciando la influencia inversa que ejerce la esfera sobre el campo magnético exterior, determinar la velocidad angular ω de rotación.

243. Demostrar que los potenciales electromagnéticos retardados

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV',$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'$$

satisfacen la condición de Lorentz

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Se supone que las integrales triples escritas converjen.

244. Hallar las ecuaciones para los potenciales escalar φ y vectorial A en la calibración coulombiana $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Las magnitudes φ y A se determinan de las correlaciones

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

§ 2. Densidad de carga y de corriente

245. En el plano XY, por una recta $y = x - l$, se mueve una carga e con velocidad constante v y alejándose del origen de las coordenadas. En el momento inicial de tiempo $t_0 =$

$= 0$, ésta se encontraba en el eje X. Hallar la distribución de las densidades espaciales ρ de la carga y $\mathbf{j}$ de la corriente.

246. Una carga e realiza oscilaciones armónicas a lo largo del eje X, conforme a la ley $x = a \operatorname{sen} \omega t$. Escribir la expresión para las densidades espaciales ρ de la carga y $\mathbf{j}$ de la corriente. Comprobar si la ecuación de continuidad vale para estas magnitudes. Hallar el valor medio de las densidades espaciales $\bar{\rho}$ de la carga y $\bar{\mathbf{j}}$ de la corriente respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$ y demostrar que

$$\int \bar{\rho}\, dV = e.$$

247. Una carga e se mueve en el plano XY por una circunferencia de radio R con velocidad angular constante ω. En el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$ aquélla se encontraba en el eje X. Escribir la expresión para las densidades espaciales ρ de la carga y $\mathbf{j}$ de la corriente, en coordenadas cilíndricas cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia. Comprobar si la ecuación de continuidad valo para las magnitudes ρ y $\mathbf{j}$. Demostrar que el valor medio de las densidades espaciales $\bar{\rho}$ de la carga y $\bar{\mathbf{j}}$ de la corriente respecto al tiempo de un período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, satisfacen las correlaciones

$$\int \bar{\rho}\, dV = e, \quad \int_0^{\infty} dr \int_{-\infty}^{\infty} dz \bar{j}_{\varphi} = \frac{e}{T}.$$

248. Una circunferencia de radio R, cargada uniformemente con densidad lineal q, gira en torno a su diámetro con una velocidad angular ω. Hallar en coordenadas esféricas la distribución de las densidades espaciales ρ de la carga y $\mathbf{j}$ de la corriente. El origen de las coordenadas coincide con el centro de la circunferencia y eje Z está orientado por el eje de rotación. Comprobar si la ecuación de continuidad vale para las magnitudes halladas.

249. Una esfera de radio R, con una carga Q homogénea que rellena su volumen, gira en torno a su diámetro fijo con una velocidad angular ω variable en tiempo. Hallar en coordenadas esféricas la distribución de las densidades ρ de la carga y $\mathbf{j}$ de la corriente en el espacio.

250. Determinar el campo electromagnético cuasiestacionario de una carga e que se mueve lentamente con una velocidad constante $\mathbf{v}$.

§ 3. Momentos magnético, dipolar y cuadripolar de cargas en movimiento

251. Una carga Q y masa m rellenan con homogeneidad el volumen de una esfera de radio R, la cual gira alrededor de su centro fijo con una velocidad angular arbitraria $\omega = \omega(t)$. Determinar el momento magnético μ de la esfera en rotación. ¿A qué equivale el factor de proporcionalidad β entre los momentos magnético μ y mecánico M, $\mu = \beta M$?

252. Un sistema mecánico cerrado consta de dos partículas en movimiento arbitrario, sus cargas son e_1, e_2 y masas m_1, m_2, respectivamente. Demostrar que si el origen de las coordenadas se fija en el centro de inercia, entonces los momentos magnético μ y mecánico M del sistema son proporcionales uno al otro. Hallar el factor de proporcionalidad.

253. Un sistema mecánico compuesto por un número finito de partículas con una misma relación entre la carga y la masa se mueve por el espacio. ¿Qué condición tiene que satisfacer el impulso total P del sistema para que el momento magnético total de las partículas no dependa de la elección del origen de las coordenadas?

254. Un disco fino de radio R, cargado uniformemente, gira en torno a su diámetro fijo con una velocidad angular ω. La carga total del disco es igual a Q. Calcular el momento magnético μ del disco en rotación.

255. Un cuadro cuadrado de lado a, cargado uniformemente con densidad lineal q, gira en torno a uno de sus lados con una velocidad angular ω. Calcular el momento magnético μ del cuadro en rotación.

256. Un neutrón con momento magnético μ_0 gira por una trayectoria dada y su radio vector $\mathbf{r}_n$ varía en el transcurso del tiempo como $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t)$. Determinar cómo se distribuye en el espacio la densidad $\mathbf{I}_n$ del momento magnético

$$\mathbf{I}_n(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mu(\mathbf{r}, t)}{\Delta V},$$

donde $\Delta\mu(\mathbf{r}, t)$ es el momento magnético de un elemento de volumen ΔV. Este último se reduce a un punto con radio vector r, como resultado de la transición extrema $\Delta V \to 0$.

257. Una partícula con masa m y carga e efectúa un movimiento elíptico en un campo potencial coulombiano de atracción α/r, donde $\alpha < 0$. La energía total de la partícula

es equivalente a $\mathscr{E}$. Hallar el valor medio del momento dipolar $\mathbf{d}$ de la carga respecto al tiempo de un período de movimiento. Expresarlo mediante la integral específica del movimiento en el campo coulombiano $\mathbf{I} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula cargada y $\mathbf{M}$ su momento.

258. El radio vector $\mathbf{r}_d$ del punto donde está ubicado un dipolo con momento $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$ varía con el tiempo conforme a la ley dada $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_d(t)$. Determinar la distribución de las densidades de carga y de corriente en el espacio. Calcular el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de la corriente hallada.

259. Un dipolo puntual con momento $\mathbf{d}$ gira por una circunferencia de radio R con velocidad angular constante ω. La circunferencia se encuentra en el plano XY y su centro coincide con el origen de las coordenadas. El vector $\mathbf{d}$ es constante a partir de su módulo y está orientado tangencialmente a la circunferencia en dirección a la rotación desde el eje X hacia el Y. Determinar el tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del sistema.

260. Una partícula con masa m y carga e realiza un movimiento elíptico en un campo potencial coulombiano α/r, donde $\alpha < 0$. La energía total, así como el momento de la partícula son respectivamente $\mathscr{E}$ y $\mathbf{M}$. El origen del sistema cartesiano de coordenadas está colocado en el centro del campo de fuerzas y el eje X está orientado por el semieje mayor de la trayectoria elíptica que se encuentra en el plano XY. Hallar, respecto al tiempo de un período, el valor medio de las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar de la carga en movimiento.

261. En el modelo de átomo de hidrógeno de Rutherford el electrón con masa m y carga e se mueve por una órbita elíptica, teniendo una energía $\mathscr{E}$ y momento $\mathbf{M}$. El semieje mayor a de la elipse coincide con el eje X y la órbita se encuentra en el plano XY. Determinar en el transcurso de un período de movimiento el promedio de intensidad del campo eléctrico cuasiestacionario a grandes distancias del átomo $r \gg a$, tomando en consideración el momento dipolar y tensor del momento cuadripolar. Investigar el resultado obtenido en el caso extremo, cuando la elipse se convierte en circunferencia.

§ 4. Ondas electromagnéticas

262. El potencial vectorial de una onda plana polarizada linealmente tiene la forma $\mathbf{A} = \mathbf{l}F(\omega t - \mathbf{kr})$, siendo $\omega = kc$, $\mathbf{l}$ un vector constante, F una función diferenciable de su argumento. En la calibración de los potenciales electromagnéticos que se examina el potencial escalar es nulo, e idénticamente $\operatorname{div} \mathbf{A}=0$. Determinar el vector de Poynting s y la densidad, de la energía w de la onda electromagnética.

263. Un cilindro de radio R y altura h en reposo está situado perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda electromagnética plana monocromática, caracterizada por el potencial vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$. La longitud de onda es pequeña en comparación con las magnitudes R y h, por lo que detrás del cilindro existe una zona de sombra. La onda electromagnética es absorbida completamente en la superficie del cilindro. Determinar la fuerza F, aplicada al cilindro en el promedio de tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

264. Una onda electromagnética plana monocromática, expresada por el potencial vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ incide sobre la superficie de una esfera inmóvil de radio R de donde se refleja totalmente. La longitud de onda es pequeña en comparación con el radio R, por lo que detrás de la esfera existe una zona de sombra. Determinar la fuerza F, aplicada a la esfera en el promedio de tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

265. Las ondas polarizadas lineal y circularmente en forma compleja se expresan por:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}(\mathbf{l}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}), \quad \mathbf{E} = \operatorname{Re}(\mathbf{b}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}),$$

siendo $\lambda = 1, 2$, C_0 una constante compleja, $\mathbf{l}^{(\lambda)}$ y $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ vectores unitarios de polarización que satisfacen las condiciones

$$\mathbf{l}^{(1)}\mathbf{l}^{(2)} = 0, \quad (\mathbf{l}^{(\lambda)})^2 = 1, \quad \mathbf{l}^{(\lambda)} = \mathbf{l}^{(\lambda)*},$$
$$\mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} = 1, \quad (\mathbf{b}^{(\lambda)})^2 = 0, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}^{(2)*}.$$

El índice λ señala dos estados de polarización de la onda independientes que responden a un mismo vector de onda $\mathbf{k}$. Demostrar que para las ondas polarizadas lineal y circular-

mente son válidas las siguientes reglas de suma

$$\sum_{\lambda=1}^{2} (\mathbf{A}l^{(\lambda)})\,(\mathbf{B}l^{(\lambda)}) = \mathbf{AB} - \frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})\,(\mathbf{Bk}),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2} (\mathbf{A}b^{(\lambda)})\,(\mathbf{B}b^{(\lambda)})^* = \mathbf{AB}^* - \frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})\,(\mathbf{B}^*\mathbf{k}),$$

donde **A** y **B** son vectores complejos arbitrarios.

266. Dos ondas monocromáticas $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1)$ y $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} (\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$ están polarizadas en direcciones mutuamente perpendiculares. Considerando que las amplitudes de las primeras son iguales, hallar la polarización de la onda resultante.

267. Dos ondas monocromáticas están polarizadas circularmente en sentidos contrarios y se propagan en una misma dirección. Las amplitudes y frecuencias de las mismas son iguales mientras que sus fases se diferencian en una magnitud constante. Determinar la onda resultante de la suma.

268. La amplitud de una onda circular con polarización dextrógira es equivalente a A y la de otra con polarización levógira, a B. Las frecuencias y fases de dichas ondas son iguales. Determinar la polarización de la onda resultante.

269. Los planos de polarización de dos ondas monocromáticas

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$$

están inclinados uno hacia el otro en cierto ángulo. Determinar la polarización de la onda resultante si $E_{01} = E_{02}$ y $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$.

270. Como resultado de la suma de dos ondas monocromáticas

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})$$

polarizadas linealmente en direcciones perpendiculares entre sí se ha obtenido una onda electromagnética. Las ondas señaladas tienen iguales amplitudes, los vectores de onda son paralelos y las frecuencias difieren en un pequeño valor $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$. Los vectores $\mathbf{E}_{01}$, $\mathbf{E}_{02}$ y $\mathbf{k}$ forman una terna a dextrógiro. Hallar la polarización de la onda resultante.

271. Dos ondas monocromáticas están polarizadas circularmente en sentidos contrarios, tienen iguales amplitudes y se propagan en una misma dirección. Las frecuencias de las ondas ω_1 u ω_2 se diferencian poco $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$. Determinar la polarización de la onda resultante.

272. A base de la superposición de ondas monocromáticas $\mathbf{l}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ con frecuencias que varían en el intervalo $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$ se ha obtenido un grupo de ondas. La dirección de propagación y el vector de polarización $\mathbf{l}$ de estas ondas son iguales, mientras que la cantidad de ondas con frecuencias en el intervalo desde ω hasta $\omega + d\omega$ son

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}\Delta} e^{-(\omega/\Delta)^2} d\omega,$$

donde Δ es una constante independiente de la frecuencia. La expresión que está como factor delante del diferencial $d\omega$ es la función de distribución de dichas ondas monocromáticas por frecuencias. Hallar la intensidad del campo eléctrico del grupo de ondas como función de las coordenadas y del tiempo.

273. A base de la superposición de ondas monocromáticas $\mathbf{l}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ con frecuencias que varían en el intervalo comprendido entre $\omega_0 - \Delta$ y $\omega_0 + \Delta$, donde $\Delta \ll \omega_0$, se ha obtenido un grupo de ondas. La dirección de propagación y el vector de polarización $\mathbf{l}$ de éstas son iguales, mientras que la amplitud del grupo de las mismas con frecuencias en el intervalo desde ω hasta $\omega + d\omega$ es igual a $\frac{E_0}{2\omega_0} d\omega$. Aquí E_0, ω_0 y Δ son constantes independientes de la frecuencia ω. Determinar la intensidad del campo eléctrico del grupo de ondas como función de las coordenadas y del tiempo.

274. La intensidad del campo eléctrico de un grupo de ondas tiene una dirección constante y se expresa por la función $\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)$ la cual difiere de cero para una región finita de variación de su argumento. Aquí $\mathbf{n}$ es un vector unitario constante, c la velocidad de la luz. Desarrollando la función dada en integral de Fourier presentar el grupo de ondas como la superposición de ondas monocromáticas.

275. La intensidad del campo eléctrico de una onda electromagnética se expresa por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{|t|}{\tau}\left|t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right|}$$

donde los vectores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{n}$, así como la magnitud τ son constantes, además $\tau > 0$. Determinar la componente de Fourier $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ de la función dada.

276. La componente de Fourier $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ de la intensidad del campo eléctrico tiene la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 \frac{(2\pi)^4}{\omega_0} \delta\left(\mathbf{k} - \frac{\omega \mathbf{n}}{c}\right) e^{-(\omega/\omega_0)^2},$$

siendo $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{n}$ vectores constantes. Determinar la intensidad del campo eléctrico como función de las coordenadas y del tiempo.

277. Un campo electrostático se caracteriza mediante el potencial esférico-simétrico $\varphi = \frac{e}{r} e^{-\varkappa r}$, donde $\varkappa$ es una constante positiva. Representar la intensidad $\mathbf{E}$ de este campo en forma de desarrollo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\, d\mathbf{k}$$

con relación a las ondas longitudinales $\mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ cuyos vectores de polarización están orientados a lo largo de $\mathbf{k}$.

278. Dos superficies cónicas, una dentro de la otra, tienen vértice y eje de simetría común. Por la superficie cónica exterior, en dirección al vértice, se mueve una onda de corriente $J = J_0 \cos(\omega t + kr)$, la cual pasa posteriormente a la superficie cónica interior y por ésta se aleja al infinito. Aquí J es la corriente superficial total, $\omega = kc$, r es la distancia desde el vértice hasta el punto de observación en la superficie cónica. Determinar el campo electromagnético rotacional en el espacio comprendido entre las superficies cónicas. Admitir que la componente radial del vector buscado $\mathbf{E}$ es nula idénticamente.

279. Por el eje de una superficie cilíndrica infinita de radio R fluye la corriente de línea $J = J_0 \cos(\omega t - kz)$. La corriente superficial total que circula por la propia superficie cilíndrica representa de por sí la onda reflejada de tipo $J = -J_0 \cos(\omega t + kz)$. Determinar el campo electromagnético rotacional dentro y fuera de la superficie cilíndrica. Admitir que el vector incógnita $\mathbf{E}$ es perpendicular al eje Z y $\omega = kc$.

§ 5. Difracción

280. Una onda electromagnética, para la cual la intensidad del campo eléctrico es $\mathbf{E} = \mathbf{l}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$, incide en dirección normal sobre una pantalla plana que posee una rendija infinita de anchura $2a$. El vector de polarización $\mathbf{l}$ es paralelo a la rendija. Considerando que la desviciaón con respecto a la óptica geométrica es pequeña, $ka \gg 1$, determinar el campo eléctrico de la onda difractada que se propaga formando pequeños ángulos de difracción. Hallar el valor medio de la intensidad dI de dispersión de la misma correspondiente a la unidad de longitud, en el intervalo de ángulos $d\theta$, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

281. En una pantalla plana están recortadas N rendijas de anchura $2a$, idénticas, paralelas e infinitas. La distancia entre las líneas axiales de dos rendijas vecinas es $2b$. Una onda electromagnética plana $\mathbf{E} = \mathbf{l}E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ incide en dirección normal sobre la pantalla. El vector de polarización $\mathbf{l}$ es paralelo a las rendijas. La longitud de onda es pequeña en comparación con las dimensiones características $ka \gg 1$ y $kb \gg 1$, de lo que resulta que los ángulos de difracción son asimismo pequeños. Determinar el campo eléctrico de la onda difractada, así como el valor medio de la intensidad dI de dispersión de la misma correspondiente a la unidad de longitud, en el intervalo de ángulos $d\theta$, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

282. Una pantalla plana tiene un orificio rectangular con lados $2a$ y $2b$. Una onda electromagnética plana monocromática de frecuencia $\omega = kc$ incide normalmente sobre la pantalla plana. El vector de polarización es paralelo a uno de los lados del orificio rectangular, además la longitud de onda es pequeña en comparación con las dimensiones características $ka \gg 1$ y $kb \gg 1$. Determinar el valor medio de la intensidad dI de la onda difractada en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de oscilación de la onda.

283. Una onda electromagnética plana, linealmente polarizada, de frecuencia $\omega = kc$ incide normalmente sobre la superficie de una pantalla infinita que tiene un orificio circular de radio R. La longitud de onda es pequeña en comparación con el radio $kR \gg 1$, por lo que los ángulos de difracción también resultan pequeños. Determinar el valor medio de la intensidad dI de la onda difractada en el ángu-

lo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de oscilación de la misma.

284. Una pantalla plana tiene un orificio anular de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). Determinar respecto al tiempo de un período de oscilación el valor medio de la intensidad dI de la onda difractada en el ángulo sólido $d\Omega$ al incidir normalmente la onda electromagnética plana, linealmente polarizada, sobre el orificio anular. La longitud de onda es pequeña en comparación con los radios, por lo tanto los ángulos de difracción también resultan pequeños.

285. Una pantalla plana tiene un orificio elíptico de semiejes a y b. Sobre la superficie de la pantalla incide normalmente una onda electromagnética plana de frecuencia $\omega = kc$. La longitud de onda es pequeña en comparación con los semiejes del orificio elíptico $ka \gg 1$ y $kb \gg 1$. Determinar el valor medio de la intensidad dI de la onda difractada en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de una oscilación de la misma.

286. Determinar respecto al tiempo de un período de oscilación el valor medio de la intensidad dI de la luz difractada en el intervalo de los ángulos $d\theta$, si sobre una placa de longitud infinita y anchura $2a$ incide normalmente una onda electromagnética plana de frecuencia $\omega = kc$. El vector de polarización es paralelo a la placa y la longitud de onda pequeña en comparación con la anchura de ésta, $ka \gg 1$.

287. Una esfera de radio R, que de por sí es un cuerpo absolutamente negro, se encuentra en el campo electromagnético de una onda plana linealmente polarizada y de frecuencia $\omega = kc$. La longitud de onda es pequeña en comparación con el radio $kR \gg 1$. Determinar respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$ el valor medio de la intensidad dI de la onda difractada en el ángulo sólido $d\Omega$.

Capítulo IV RADIACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS POR CARGAS EN MOVIMIENTO LENTO

El estudio del problema relacionado con la radiación de ondas electromagnéticas se facilita introduciendo los potenciales electromagnéticos **A** y φ los cuales se definen por las correlaciones

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{IV.1}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{IV.2}$$

Las magnitudes **A** y φ se definen no unívocamente. La transición de los potenciales electromagnéticos **A** y φ a otros **A**′ y φ' mediante conversiones de calibración:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \tag{IV.3}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{IV.4}$$

no modifica la intensidad de los campos eléctrico y magnético. Aquí $f = f(\mathbf{r}, t)$ es una función arbitraria. Ordinariamente ésta se elige de forma que se cumpla la condición de Lorentz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{IV.5}$$

Entonces, las ecuaciones para los potenciales electromagnéticos, que se deducen de las ecuaciones de Maxwell, adquieren una forma más sencilla:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{IV.6}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{IV.4}$$

y se denominan ecuaciones de D'Alembert. De éstas solamente tienen sentido físico equellas soluciones que cumplan la condición de Lorentz (IV.5).

La radiación de ondas electromagnéticas se caracteriza por las soluciones de las ecuaciones (IV.6) y (IV.7) en forma de potenciales retardados:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \qquad \text{(IV.8)}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|'} dV', \qquad \text{(IV.9)}$$

siendo $\mathbf{r}$ el radio vector del punto de observación, $\mathbf{r}'$ el radio vector del elemento de volumen dV' y t el tiempo de observación.

Cada elemento suficientemente pequeño de superficie de la onda esférica puede examinarse, a grandes distancias del sistema cargado, como una onda plana en la cual las intensidades de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ son iguales en módulo y forman una terna derecha de vectores con la dirección $\mathbf{n}$ de propagación de la onda

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \qquad \text{(IV.10)}$$

De esta manera, para determinar el campo electromagnético de radiación es suficiente calcular solamente la intensidad del campo magnético, la cual está relacionada con el potencial vectorial (IV.8) por la correlación (IV.1).

Fijemos el origen de las coordenadas dentro de un sistema cargado, cuya máxima dimensión lineal la designamos por l. A grandes distancias $r \gg l \geqslant r'$ tenemos $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx \approx \mathbf{r} - \mathbf{nr}'$ y el potencial vectorial (IV.8) se escribirá aproximadamente así:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV', \qquad \text{(IV.11)}$$

donde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Seguidamente supongamos que la radiación tiene lugar fundamentalmente en la frecuencia ω, además la longitud de la onda emitida (dividida por 2π) es grande comparada con la longitud lineal del manantial $\lambda = \frac{}{\omega} \gg l$. Asimismo,

la investigación del campo electromagnético vamos a efectuarla a grandes distancias en la zona de la onda

$$r \gg \lambda \gg l.$$

En estas suposiciones la expresión subintegral en (IV.11) puede desarrollarse en serie respecto a la variable $\frac{\mathbf{nr}'}{c}$, que corresponde al desarrollo del potencial vectorial en serie respecto al parámetro menor l/λ:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2 r}, \qquad \text{(IV.12)}$$

donde el vector $\mathbf{D}$ tiene componentes

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta.$$

En la fórmula (IV.12) los sumandos segundo y tercero son numéricamente de un mismo orden, pero en conjunto son menores que el primer miembro en razón de l/λ. Los sumandos de grado superior de insignificancia están menospreciados. El momento dipolar $\mathbf{d}$, momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar son funciones del tiempo teniendo en cuenta el retardo,

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right). \qquad \text{(IV.13)}$$

Con arreglo a la carga que se mueve irregularmente a una velocidad no relativista $\mathbf{v}$, la suma (IV.12) representa de por sí un desarrollo respecto al parámetro $\frac{v}{c} \ll 1$.

Calculando el rotacional de la expresión (IV.12) y menospreciando los miembros insignificantes, proporcionales a $1/r^2$, obtenemos la intensidad del campo magnético de la onda emitida,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r}. \qquad \text{(IV.14)}$$

El flujo de energía electromagnética en cada punto de la zona de la onda se define por el vector de Poynting

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{cH^2}{4\pi} \mathbf{n}. \qquad \text{(IV.15)}$$

La energía electromagnética I, radiada por el manantial en unidad de tiempo (intensidad de radiación), es igual al flujo del vector de Poynting a través de una esfera de gran radio r con centro en el origen de las coordenadas

$$I = \frac{c}{4\pi} \int H^2 r^2 \, d\Omega. \qquad \text{(IV.16)}$$

Valiéndose de las fórmulas (IV.14) y (IV.16) no resulta difícil obtener las siguientes expresiones para la intensidad de radiación I:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{180c^5}. \qquad \text{(IV.17)}$$

El primero, segundo y tercer sumandos representan de por sí las intensidades de radiación dipolar, dipolar magnética y cuadripolar. Los sumandos que describen las radiaciones de momentos multipolares cuyo grado es superior se desprecian. Conservando los términos mencionados obtenemos una serie infinita que converge con rapidez y donde algunos de sus términos, en caso general, dependen de la elección del origen de las coordenadas. Por lo tanto, es necesario señalar el sistema de coordenadas en que están determinados los momentos dipolar, magnético dipolar y cuadripolar que entran en la fórmula (IV.17). Por lo común, el origen de las coordenadas se fija en un punto físicamente destacado del sistema cargado, por ejemplo, en su centro de inercia o punto de simetría, así como en el centro de rotación de las cargas.

Como la intensidad de radiación total (IV.16) simboliza de por sí el flujo de energía electromagnética a través de una esfera de gran radio r con centro en el origen de las coordenadas, el valor numérico de esta magnitud varía también al desplazar el origen de las coordenadas como consecuencia del cambio de posición de la esfera indicada respecto al sistema emisor. Sin embargo, la energía total radiada

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I \, dt, \qquad \text{(IV.18)}$$

no depende del desplazamiento del origen de las coordenadas dentro del sistema emisor.

Habitualmente, los vectores μ y $\frac{1}{c}\mathbf{D}$ en módulo son según el orden de valor, menores en l/λ (o v/c) veces que $|\mathbf{d}|$. Entonces, en la fórmula (IV.14) el segundo y tercer sumandos resultan ser pequeñas correcciones al calcular la intensidad del campo magnético en la zona de la onda. Sin embargo, en este caso en la fórmula (IV.17) el segundo y tercer sumandos deberán suprimirse con el fin de no superar la precisión de cálculo elegida. Para determinar la primera corrección a la radiación dipolar es necesario calcular el campo magnético con mayor precisión, conservando en la fórmula (IV.14) el miembro suprimido de orden l^2/c^2 (o v^2/c^2). Entonces, a la suma (IV.17) se agrega un sumando más, el cual es, según el orden de valor, equivalente a las intensidades de radiación dipolar magnética y cuadripolar (véanse los problemas 349 y 350).

Si la radiación dipolar del sistema disminuye por cualquier causa y según el orden de valor es considerablemente menor que la dipolar magnética y cuadripolar, entonces, el segundo y tercer sumandos de la fórmula (IV.17) resultan ser los principales miembros y junto con el primero expresan la radiación del sistema con determinada precisión. Los miembros omitidos son de por sí correcciones insignificantes de un grado más elevado. Esta última afirmación es generalmente válida y en el caso cuando los tres sumandos (IV.17) son según sus valores de un mismo orden. Algunos términos de la suma (IV.17) pueden convertirse en cero.

La energía total (IV.18) radiada por el manantial durante todo el tiempo de funcionamiento puede representarse como la suma de energías radiadas en diferentes frecuencias.

$$\mathscr{E} = \int_0^\infty \mathscr{E}(\omega)\, d\omega, \qquad \text{(IV.19)}$$

donde $\mathscr{E}(\omega)$ es la densidad espectral de radiación, o sea, la energía correspondiente al intervalo unitario de frecuencias. Esta caracteriza la composición espectral de radiación.

Para determinar la densidad espectral de radiación $\mathscr{E}(\omega)$ de un manantial dado, es menester desarrollar las magnitudes que componen la intensidad de radiación (IV.17) en integral de Fourier. Entonces la energía $d\mathscr{E}_\omega = \mathscr{E}(\omega)d\omega$,

radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega+d\omega$ se escribirá de la siguiente forma *)

$$d\mathscr{E}_\omega = \left(\frac{2 \mid \ddot{\mathbf{d}}(\omega) \mid^2}{3\pi c^3} + \frac{2 \mid \ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) \mid^2}{3\pi c^3} + \frac{\mid \dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega) \mid^2}{180\pi c^5} \right) d\omega, \quad \text{(IV.20)}$$

siendo $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)$ y $\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)$ las componentes de Fourier correspondientes a las magnitudes $\ddot{\mathbf{d}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(t)$ y $\dddot{D}_{\alpha\beta}(t)$ y la expresión entre paréntesis representa de por sí la función buscada $\mathscr{E}(\omega)$.

Por ejemplo, la energía radiada por la carga e en pequeñas frecuencias $\omega\tau \ll 1$ en un campo de fuerza exterior es:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2}{3\pi c^3} d\omega,$$

donde τ es el orden de valor del tiempo de interacción entre la carga y el campo exterior, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades de la carga antes y después de esta interacción.

Sea que en cierto punto de la zona de onda se han determinado las intensidades de los campos eléctrico $\mathbf{E}(t)$ y magnético $\mathbf{H}(t)$ de una onda electromagnética plana la cual se propaga en dirección $\mathbf{n}$. En este caso la energía $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega)$ que en la dirección normal pasa a través de la unidad de superficie, en el intervalo unitario de frecuencias se expresa por la fórmula

$$\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega) = \frac{c \mid \mathbf{E}(\omega) \mid^2}{4\pi^2} = \frac{c \mid \mathbf{H}(\omega) \mid^2}{4\pi^2} \quad \text{(IV21·)}$$

El gráfico de la función $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega)$ es de por sí la raya espectral de la radiación dada que se propaga en dirección $\mathbf{n}$. El contorno de la raya espectral corrientemente tiene forma de cúpula, con el máximo principal en cierta frecuencia ω_0. Para caracterizar la composición espectral de la radiación se introduce de la siguiente manera la noción anchura de la raya espectral $\Delta\omega$. Se denomina semianchura de la raya espectral $\Delta\omega/2$ a un valor del módulo de diferencia $\mid \omega - \omega_0 \mid$ tal, para el cual la función $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega)$ decrece dos veces en comparación con su máximo valor $\mathscr{E}_\mathbf{n}(\omega_0)$. Respecto a un manantial concreto de ondas electromagnéticas la magni-

*) Entre las componentes de Fourier $f(\omega)$ y $\dot{f}(\omega)$ de la función $f(t)$ y de su derivada $\dot{f}(t)$ existe la correlación $\dot{f}(\omega) = -i\omega f(\omega)$. Análogamente, $\ddot{f}(\omega) = -\omega^2 f(\omega)$ y $\dddot{f}(\omega) = i\omega^3 f(\omega)$.

tud $\mathscr{E}_n(\omega)$ se diferencia de la densidad espectral de radiación $\mathscr{E}(\omega)$ introducida anteriormente por cierto factor que depende de la distancia r hasta el manantial y dirección $\mathbf{n}$. Por esto, la anchura de la raya espectral puede ser también determinada mediante $\mathscr{E}(\omega)$.

Se denomina intensidad de radiación dI en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ a la energía que pasa en unidad de tiempo a través del elemento $dS = r^2 d\Omega$ de una superficie esférica de gran radio r, cuyo centro se encuentra en el origen de las coordenadas. Calculando el flujo del vector de Poynting (IV.15) a través de dicho elemento se obtiene la distribución angular de la intensidad de radiación

$$dI = \frac{cH^2 r^2}{4\pi} d\Omega, \qquad \text{(IV.22)}$$

donde la intensidad del campo magnético se define por la expresión (IV.14). Si la radiación dipolar no está debilitada, entonces, después de elevar al cuadrado la suma (IV.14) deberán omitirse los sumandos que poseen un valor de orden l^2/λ^2 (o v^2/c^2) con el fin de no sobrepasar la precisión adoptada de cálculo.

La fórmula (IV.22) se simplifica notablemente cuando el sistema emisor se caracteriza solamente por el momento dipolar, momento magnético o tensor del momento cuadripolar y adquiere respectivamente las formas

$$dI_d = \frac{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \qquad \text{(IV.23)}$$

$$dI_\mu = \frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \qquad \text{(IV.24)}$$

$$dI_D = \frac{(\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})^2}{144\pi c^5} d\Omega. \qquad \text{(IV.25)}$$

La distribución angular de la energía total, radiada durante el tiempo de funcionamiento del manantial, se obtiene integrando respecto al tiempo la intensidad de radiación (IV.22)

$$d\mathscr{E}_n = \frac{cr^2}{4\pi} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\mathbf{r}, t)\, dt. \qquad \text{(IV.26)}$$

Desarrollando en esta fórmula la intensidad $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ del campo magnético en integral de Fourier con relación

a la variable t, resulta fácil determinar la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$ radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$:

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |H(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega\, d\omega. \qquad \text{(IV.27)}$$

Mediante la fórmula (IV.14), la componente de Fourier $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ de la intensidad del campo magnético en (IV.27) se representa en forma de suma de términos relacionados con las radiaciones dipolar, dipolar magnética y cuadripolar. Sin embargo, después de elevar al cuadrado la suma indicada, es menester, cuando la radiación dipolar no está suprimida, prescindir de los miembros cuyo valor sea de orden de l^2/c^2 (o v^2/c^2).

Si un electrón se encuentra en el campo de una onda electromagnética, entonces, en el caso no relativista, sobre éste actúa la fuerza $e\mathbf{E}$. El sumando $\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ puede omitirse. Bajo la acción de esta fuerza el electrón adquiere una aceleración $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$, y por lo tanto, radía *). La distribución angular de la radiación dipolar de un electrón que efectúa oscilaciones en el campo de una onda monocromática se expresa por la fórmula (IV.22). Como resultado de esta radiación tendrá lugar la dispersión de la onda incidente en el electrón libre. Este proceso se caracteriza por la sección eficaz de dispersión $d\sigma$ en el ángulo sólido $d\Omega$:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\bar{s}}, \qquad \text{(IV.28)}$$

donde s es el módulo del vector de Poynting de la onda incidente y la raya encima de las letras significa el valor medio respecto al tiempo de un período de oscilación de la misma.

Sobre una partícula cargada radiante actúa, por parte del campo electromagnético radiado, una fuerza o reacción de frenado que la denominan fuerza de rozamiento por radiación. En este caso las pérdidas energéticas de la partícula

*) En este manual en todas las partes se considera que el movimiento de micropartículas con un grado de precisión suficiente se expresa por las leyes de la mecánica clásica. Una descripción completa sobre el movimiento de micropartículas y su interacción con el campo electromagnético se aporta en la teoría cuántica.

para la radiación pueden examinarse como el resultado de superación de la fuerza de rozamiento señalada que surje en el proceso de radiación. La fuerza de rozamiento por radiación en el caso no relativista, tiene la forma

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{r}}, \qquad \text{(IV.29)}$$

donde e y $\mathbf{r}$ son la carga y radio vector de la partícula en movimiento. Esta fuerza es pequeña en comparación con la fuerza exterior que obra sobre la partícula.

Cuando la radiación tiene lugar con gran intensidad durante un lapso de tiempo largo (infinito), entonces, es necesario calcular la influencia inversa de la radiación sobre el movimiento de la partícula cargada. Este cálculo puede realizarse de dos maneras. La primera consiste en adicionar la fuerza de rozamiento por radiación (IV.29) a la fuerza exterior $\mathbf{F}$ en la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{\mathbf{r}}. \qquad \text{(IV.30)}$$

En este caso la intensidad, la composición espectral y distribución angular de la radiación se calculan por las fórmulas (IV.16). . .(IV.27), en las cuales la función $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es la solución de la ecuación (IV.30).

La segunda está basada en la ley de conservación de la energía, según la cual, el decrecimiento de energía $\mathscr{E}$ de una partícula cargada en un campo exterior de fuerza constante $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ tiene lugar a cuenta de la radiación

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = I, \qquad \text{(IV.31)}$$

donde la magnitud $\mathscr{E}$ está constituida por las energías cinética y potencial de la partícula, mientras que la intensidad de radiación I se obtiene de la fórmula (IV.27). La ecuación (IV.31) es válida solamente en la primera, diferente de cero, aproximación (sin tener en cuenta los efectos relacionados con el retardo de la señal electromagnética radiada en el interior de la región de movimiento de la carga). A diferencia del caso anterior, el radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de la partícula cargada que entra en la expresión para la intensidad de radiación, aquí se toma de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad \text{(IV.32)}$$

sin tomar en consideración la fuerza de rozamiento por radiación. La última aporta a la correlación (IV.31) una corrección pequeña despreciable. La ecuación de movimiento (IV.32) da la posibilidad de expresar el segundo miembro de la igualdad (IV.31) mediante la energía $\mathscr{E}$, lo que permite obtener una ecuación diferencial respecto a esta magnitud. La ecuación diferencial obtenida caracteriza el decrecimiento de energía de la partícula como resultado de una radiación prolongada.

§ 1. Radiación dipolar

288. Una partícula con masa m y carga e pasa a través de un condensador. La distancia entre las armaduras del condensador es igual a l, mientras que la intensidad E del campo eléctrico es homogénea y constante. El ángulo entre el vector E y la dirección de la velocidad $\mathbf{v}_0$ de la partícula cuando ésta irrumpe es igual a α. Los signos de la carga e y del coseno del ángulo α son iguales. Hallar la energía $\mathscr{E}$ que pierde la partícula para la radiación dipolar durante su traspaso por el condensador.

289. Una partícula con masa m y carga e pasa por el diámetro de una esfera de radio R, dentro de la cual está distribuida uniformemente una carga Q. Las cargas de la partícula y de la esfera son de signo opuesto. Antes de irrumpir en la esfera la partícula poseía una carga cinética $\mathscr{E}_0$. Determinar la energía $\mathscr{E}$ que pierde la partícula para la radiación dipolar durante su movimiento a través de la esfera.

290. La intensidad H del campo magnético en un semiespacio es homogénea, constante y está orientada paralelamente al plano de separación. En esto semiespacio entra un protón con masa m y carga e. La velocidad v del protón al irrumpir es perpendicular al plano de separación. Determinar la energía $\mathscr{E}$ que pierde el protón para la radiación dipolar durante su movimiento por el campo magnético.

291. Un protón con masa m y carga e se mueve en campos eléctrico y magnético que se cruzan. Las intensidades E y H de estos campos satisfacen las condiciones $\mathbf{EH} = 0$ y $E \ll H$. Los campos exteriores son homogéneos y constantes, mientras que el protón en el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$, tenía una velocidad $\mathbf{v}_0$. Determinar la energía de la radiación dipolar que pierde la partícula en el tiempo t.

292. La antena lineal más simple representa de por sí un conductor fino rectilíneo de longitud l por el cual pasa la corriente $J = J_0 \cos \omega t$. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación en ondas largas de la antena respecto al tiempo de un período de oscilación de la corriente.

293. Una partícula con masa m y carga e, bajo la influencia de una fuerza elástica, puede efectuar oscilaciones armónicas con una frecuencia ω_0 (lo que se denomina oscilador). Considerando la fuerza de rozamiento por radiación determinar, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, el valor medio de la intensidad I de radiación del oscilador, que efectúa oscilaciones forzadas permanentes en el campo eléctrico exterior con intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$.

294. Un electrón con masa m y carga e pasa a gran distancia l de un núcleo fijo cuya carga es $Z \mid e \mid$. En el instante infinitamente lejano de tiempo $t = \infty$ el electrón poseía una velocidad equivalente en valor absoluto a v_0. Menospreciando la curvatura de la trayectoria hallar la energía $\mathcal{E}$ que pierde el electrón para la radiación dipolar durante todo el tiempo de vuelo.

295. Una partícula con masa m y carga e pasa a gran distancia l de un dipolo con momento $\mathbf{d}$ el cual se encuentra en cierto punto del espacio. La velocidad de la partícula en el infinito era $\mathbf{v}_0$. Considerando que la trayectoria es aproximadamente rectilínea, determinar la energía total $\mathcal{E}$ que pierde la partícula para la radiación dipolar en dos casos: a) el momento dipolar $\mathbf{d}$ es paralelo a la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula; b) el momento dipolar $\mathbf{d}$ es perpendicular a la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y se encuentra en el plano de movimiento de la partícula.

296. La carga total y momento dipolar de un átomo excitado en reposo son nulas, mientras que las componentes del tensor del momento cuadripolar tienen la forma $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$ y $D_{11} = D_{22} = 1/2\, D$. A una distancia grande l del átomo, en el plano XY, pasa un electrón con masa m y carga e. En el instante de tiempo infinitamente lejano $t = -\infty$, éste tenía una velocidad equivalente en valor absoluto a v_0. Considerando que la trayectoria es aproximadamente rectilínea y menospreciando la polarizabilidad del átomo, bajo la influencia del electrón que pasa, determinar la energía total $\mathcal{E}$ que pierde el electrón para la radiación.

297. Como resultado de la fisión, un núcleo se desintegra en dos fragmentos con números de masa A_1, A_2 y cargas

Z_1e, Z_2e. La suma de energías cinéticas de los dos fragmentos en el sistema del centro de inercia es en el infinito $\mathscr{E}_0$. La masa del nucleón es m. Calcular la energía total $\mathscr{E}$ de la radiación dipolar, condicionada por la interacción coulombiana de los dos fragmentos que se separan. Admitir que los fragmentos se mueven conforme a las leyes de la mecánica clásica, comenzando su movimiento de aquellos puntos del espacio donde sus velocidades relativas eran iguales a cero.

298. Un protón de masa m y carga e se mueve perpendicularmente a un campo magnético constante y homogéneo de intensidad H. Su energía cinética en el instante inicial del tiempo $t_0 = 0$ era igual a $\mathscr{E}_0$. Hallar la ley de disminución de la energía cinética $\mathscr{E}$, condicionada por la radiación dipolar.

299. En un campo exterior de potencial una partícula con masa m y carga e oscila armónica y unidimensionalmente con frecuencia ω. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ su energía total era igual a $\mathscr{E}_0$. Sin recurrir claramente a la expresión de la fuerza de rozamiento por radiación, determinar en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$ el valor medio de la ley según la cual decrece la energía total $\mathscr{E}$ de la partícula, condicionada por la radiación dipolar. Admitir que en cada momento de tiempo la desviación del régimen armónico de oscilaciones es despreciablemente pequeño $\frac{d\mathscr{E}}{dt} \ll \omega\mathscr{E}$. Por esto, al mediar, las funciones lentas del tiempo pueden ser consideradas como constantes.

300. En el modelo clásico del átomo, propuesto por Rutherford, el electrón con masa m y carga e gira por una órbita circular en torno al núcleo inmóvil cuya carga es $Z \mid e \mid$. Hallar la ley según la cual decrece la energía total del electrón $\mathscr{E}$, condicionada por la radiación dipolar. Calcular el tiempo t_c al cabo del cual el electrón caerá a partir de su órbita sobre el núcleo como resultado de la pérdida de energía para la radiación dipolar. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ el electrón se encontraba a una distancia R del núcleo.

301. El modelo del átomo de hidrógeno propuesto por J. J. Thomson representa de por sí una esfera fija de radio R, cargada con homogeneidad y cuya carga total positiva es $\mid e \mid$. Dentro de la esfera se mueve un electrón puntual

con masa m y carga e. ¿A qué será igual la frecuencia ω de la onda electromagnética que emite este sistema? Admitiendo que en el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ el electrón se encontraba a una distancia R del centro de la esfera, determinar respecto al tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$ el valor medio de la ley según la cual decrece la energía total $\mathcal{E}$ del electrón, condicionada por la fuerza de rozamiento por radiación. Al mediar, las funciones lentas del tiempo deben considerarse como constantes.

302. Demostrar que en un sistema cerrado de partículas cargadas en las cuales las relaciones entre la masa y la carga son idénticas no existe radiación dipolar.

303. Un gas electrónico con densidad N_0 se encuentra en un campo magnético constante homogéneo exterior de intensidad H. La distribución de electrones según energías cinéticas del movimiento de avance se expresa por la distribución de Maxwell, mientras que el promedio de distancia entre los electrones es muy grande comparado con la longitud de la onda emitida. Determinar la intensidad I de radiación emitida por la unidad de volumen del gas electrónico, condicionada por el campo magnético exterior.

304. Dos partículas de igual masa m están unidas rígidamente entre sí por una varilla de longitud l, cuya masa puede menospreciarse. Las cargas de las partículas son idénticas en valor absoluto, pero de signo opuesto. La intensidad E del campo eléctrico exterior es homogénea, constante y está orientada en dirección de la carga negativa a la positiva. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ la varilla estaba en reposo y formaba con el vector E un ángulo pequeño $\psi_0 \ll 1$. Determinar la intensidad I de radiación dipolar del sistema de dos cargas.

305. La distancia a entre dos dipolos iguales y paralelos con momentos $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ es ωt es, en términos de valor, igual a la longitud de la onda radiada $a \sim c/\omega = \lambda$. El vector constante $\mathbf{d}_0$ es paralelo a la recta que une a los dipolos. Hallar el valor medio de la intensidad I de radiación del sistema de dos dipolos respecto al tiempo durante el período $T = 2\pi/\omega$. Investigar el caso límite cuando $a \ll \lambda$.

306. Un sistema, compuesto de una gran cantidad N de dipolos puntuales paralelos, ocupa una región del espacio cuyas dimensiones lineales son infinitesimales, comparadas con las longitudes principales de las ondas emitidas. Las

frecuencias de oscilación de los dipolos están dispersadas cerca de cierta frecuencia ω de tal forma, que la suma de los momentos dipolares con frecuencias en el intervalo desde $\omega + \varepsilon$ hasta $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$ es igual a $\mathbf{d}_0 f(\varepsilon) \cos(\omega + \varepsilon) t\, d\varepsilon$, donde el vector $\mathbf{d}_0$ es constante y la función de distribución $f(\varepsilon)$ tiene la forma $f(\varepsilon) = \frac{NT_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2 T_0^2}$. Las magnitudes T_0 y ε satisfacen las desigualdades $N \gg \omega T_0 \gg 1$ y $-\infty \ll \varepsilon \ll \infty$. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación del sistema respecto al tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$, así como la energía total $\mathscr{E}$ de la radiación dipolar en un tiempo infinito $-\infty \ll t \ll \infty$.

307. Un electrón con masa m y carga e se mueve elípticamente en el interior de una región esférica, rellena con una carga homogénea positiva de densidad espacial ρ. En el momento inicial de tiempo el electrón se encontraba en el punto con radio vector $\mathbf{r}_0$, teniendo una velocidad $\mathbf{v}_0$. Determinar la energía $\mathscr{E}$ que pierde el electrón para la radiación dipolar durante un período de movimiento.

308. Un electrón con masa m y carga e se mueve por una órbita elíptica en torno al núcleo fijo cuya carga es $Z|e|$. La energía total y momento mecánico del electrón son equivalentes a $\mathscr{E}$ y M respectivamente. Determinar la energía $\mathscr{E}_d$ que pierde el electrón para la radiación dipolar durante un período de movimiento.

309. Una partícula con carga e_1 positiva y masa m_1 pasa siendo su parámetro (o distancia) de impacto l cerca de un núcleo atómico con masa m_2 y carga e_2. La velocidad de la partícula respecto al núcleo, a una distancia infinitamente grande de éste, era igual a $\mathbf{v}_0$. Determinar la energía $\mathscr{E}_d$ que pierde la partícula para la radiación dipolar en todo el tiempo que pasa cerca del núcleo.

310. Una partícula con masa m y carga e se mueve en un campo potencial $U = \alpha/r^2$, donde α es una constante positiva. La energía total y el momento mecánico de la partícula son respectivamente $\mathscr{E}$ y M. Determinar la energía $\mathscr{E}_d$ que pierde la partícula para la radiación dipolar en un tiempo infinito de movimiento desde $t = -\infty$ hasta $t = \infty$.

311. El flujo de partículas idénticas con masa m y carga e es dispersado por un campo esférico-simétrico de potencial repulsivo $U = U(r)$. La velocidad de cada partícula que irrumpe es, a una distancia infinitamente grande del centro

de fuerza, igual a v_0. Hallar la radiación eficaz

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E} \cdot 2\pi l \, dl,$$

donde $\Delta\mathscr{E}$ es la energía total de radiación dipolar de la partícula que pasa con un parámetro de impacto l. Representar la magnitud $\varkappa$ en forma de integral doble.

§ 2. Radiación dipolar magnética y cuadripolar

312. Un neutrón con momento magnético interior μ, irrumpe en un campo magnético homogéneo constante de intensidad H. El momento mecánico interior del neutrón M está vinculado con el magnético por la correlación $\mu = -\beta M$, siendo el ángulo entre los vectores μ y H, cuando el neutrón irrumpe en el campo, igual a θ_0. Hallar la intensidad I de radiación.

313. Por una simplísima antena de marco, que es de por sí un cuadro rectangular con lados a y b, circula una corriente lineal $J = J_0 \cos \omega t$. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación de la antena en ondas largas en el tiempo de un período de oscilación de la corriente.

314. Una varilla de material ferromagnético fina y homogénea de longitud l tiene una masa y momento magnético, por unidad de longitud, equivalentes a m_l y μ_l respectivamente. En el momento inicial de tiempo la varilla está en reposo y forma un pequeño ángulo ψ_0 con la dirección del campo magnético homogéneo constante exterior de intensidad H. Determinar la intensidad I de radiación condicionada por la oscilación de la varilla imantada.

315. ¿Bajo qué condición la intensidad de la radiación dipolar magnética no depende de la elección del origen de las coordenadas?

316. Un electrón con masa m y carga e se mueve en un campo eléctrico homogéneo constante exterior de intensidad E. Representar la intensidad I de la radiación dipolar magnética como función de la velocidad v del electrón e intensidad del campo eléctrico.

317. Una esfera de radio R realiza pequeñas vibraciones torsionales alrededor de su eje de simetría con una frecuencia de ω_0. El ángulo máximo de rotación es ψ_0. La carga Q

y masa están distribuidas uniformemente por el volumen de la esfera. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación de la esfera respecto al tiempo de un período de oscilación.

318. Una esfera homogénea de radio R gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. El eje de rotación está inclinado y forma un ángulo θ con la dirección del campo magnético constante exterior de intensidad H. La carga total y masa de la esfera son respectivamente Q y m. Determinar la intensidad I de radiación.

319. Por un anillo fino homogéneo de radio R y masa m circula una corriente continua J. En el momento inicial de tiempo el anillo estaba en reposo y su eje formaba un ángulo pequeño ψ_0 con la dirección del campo magnético homogéneo constante exterior de intensidad H ($\psi_0 \ll 1$). La corriente J circula en el sentido de las agujas del reloj al mirar según la dirección del vector H. Hallar la intensidad I de radiación al oscilar el anillo.

320. En un marco cuadrado fino e inmóvil de lado l se ha excitado una corriente $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$. Determinar la energía total $\mathcal{E}$ de radiación en ondas largas en el transcurso de tiempo $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$.

321. Dos cargas idénticas de magnitud e realizan un movimiento plano. Sus coordenadas polares r_1, ψ_1, r_2 y ψ_2 varían con el tiempo conforme a la ley

$$r_1 = r_2 = a\dot{\psi}^2, \quad \psi_1 = \psi(t), \quad \psi_2 = \pi + \psi(t),$$

siendo a una constante positiva y $\psi(t)$ una función monótona comprendida entre los límites $0 \leqslant \psi(t) \leqslant \pi$. Determinar la intensidad de radiación dipolar magnética de este sistema.

322. ¿Será posible una radiación dipolar magnética en los modelos del átomo de hidrógeno propuestos por Rutherford y J. J. Thomson (véase los problemas 300 y 301)?

323. Demostrar que en ausencia de un campo exterior la intensidad de radiación dipolar magnética de dos partículas cargadas que interaccionan entre sí es nula, si el origen de las coordenadas se sitúa en el centro de inercia de las mismas.

324. Un sistema cerrado está compuesto por un número finito de partículas con iguales relaciones entre la carga y la masa. Demostrar que en tal sistema no hay radiación dipolar magnética.

325. Un sistema de partículas con la misma relación entre la carga y la masa y que es igual a e/m, realiza un movimiento finito en el campo central-simétrico exterior, engendrado por cierta partícula en reposo. En el espacio hay introducido un campo magnético constante homogéneo débil de intensidad H. Determinar la intensidad de los campos eléctrico $\mathbf{E}_M$ y magnético $\mathbf{H}_M$ de la radiación dipolar magnética en la zona de onda, así como la frecuencia de las ondas emitidas.

326. La distancia entre dos momentos magnéticos $\mu_1 = \mu_0 \cos \omega t$ y $\mu_2 = \mu_0 \cos [(\omega + \Delta\omega) t + \alpha]$ es pequeña en comparación con las longitudes de las ondas que se emiten. Las frecuencias de oscilación satisfacen la condición $\Delta\omega \ll \omega$ y las magnitudes μ_0 y α son constantes. Hallar el valor medio de la intensidad I de radiación de este sistema respecto al tiempo comprendido entre t y $t + T$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de las oscilaciones rápidas.

327. Un sistema de N momentos magnéticos ocupa una región del espacio, cuyas dimensiones lineales son infinitesimales en comparación con las longitudes de las ondas que se emiten. Los momentos magnéticos se expresan por la fórmula $\mu_n = \mu_0 \cos [(\omega + n\varepsilon) t]$, donde el vector μ_0 es constante y el número n adquiere los valores $n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$. La dispersión de las frecuencias es pequeña en comparación con la frecuencia fundamental $\varepsilon N \ll \omega$. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación del sistema respecto al tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$.

328. El conjunto de una gran cantidad N de pequeños contornos cerrados con corriente alterna constituye un sistema emisor cuyas dimensiones lineales son considerablemente pequeñas en comparación con las longitudes fundamentales de las ondas que se emiten. Los momentos magnéticos de los contornos de corriente realizan oscilaciones armónicas. La mayor parte de éstas tienen frecuencias que apenas se diferencian de cierta frecuencia ω. El momento magnético total de los contornos de corriente con oscilaciones de frecuencias en el intervalo entre $\omega + \varepsilon$ y $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$ es igual a $d\mu = \mu_0 f(\varepsilon) \cos(\omega + \varepsilon) t\, d\varepsilon$, donde μ_0 es un vector constante y la función $f(\varepsilon) = \frac{N\tau}{\pi(\varepsilon^2\tau^2 + 1)}$ caracteriza la distribución de dichos contornos por fre-

cuencias de oscilaciones armónicas, bajo la condición de $N \gg \omega\tau \gg 1$ y $-\infty \leqslant \varepsilon \leqslant \infty$. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación del sistema respecto al tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$, así como la energía total $\mathscr{E}$ de la radiación dipolar magnética en el transcurso de un tiempo infinito $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$.

329. ¿Bajo qué condición la intensidad de radiación cuadripolar no depende de la elección del origen de las coordenadas?

330. Una bolita pequeña de masa arbitraria está fijada en el extremo inferior de una varilla imponderable de longitud $2l$, la cual puede girar libremente alrededor de su punto medio inmóvil. Los extremos opuestos de la varilla llevan cargas puntuales de magnitud e. En el momento inicial de tiempo la varilla tenía una pequeña desviación respecto a su posición vertical en un pequeño ángulo ψ_0 y se encontraba en reposo. A continuación, bajo la acción de la fuerza de gravedad aplicada a la bolita, la varilla efectúa pequeñas oscilaciones. Determinar el valor medio de la intensidad I de radiación del sistema respecto al tiempo de un período de oscilación.

331. Dos partículas con igual relación entre la carga y la masa $e_1/m_1 = e_2/m_2 = e/m$ están unidas entre sí por un muelle y realizan oscilaciones armónicas en ausencia del campo de gravedad. La longitud del muella sin carga es l y su coeficiente de rigidez, k. En el momento inicial de tiempo el muelle estaba distendido hasta la longitud l_0 y se encontraba en reposo. Hallar el valor medio de la intensidad I de radiación respecto al tiempo de un período de oscilación del muelle. Menospreciar la interacción de las cargas entre sí.

332. Un núcleo se desintegró en dos fragmentos con números másicos A_1, A_2 y cargas Z_1e, Z_2e. La relación entre la carga y la masa en los fragmentos es idéntica $\frac{Z_1e}{A_1m} = \frac{Z_2e}{A_2m} = \frac{Ze}{Am}$, siendo m la masa del nucleón, Z y A ciertos números. Como resultado de la repulsión coulombiana los fragmentos se expulsan hacia el infinito. En el sistema del centro de inercia la energía de los dos fragmentos es $\mathscr{E}_0$ y sus velocidades antes de la expulsión, igual a cero. Determinar la energía total $\mathscr{E}$ de radiación que acompaña dicha expulsión de los fragmentos nucleares.

333. Un protón con masa m y carga e se mueve en dirección arbitraria en un campo eléctrico constante homogéneo exterior de intensidad E. Representar la intensidad I de radiación cuadripolar como función de la velocidad v del protón e intensidad del campo eléctrico exterior.

334. Dos partículas idénticas con masas m y cargas e giran en un campo magnético con velocidad angular constante ω por una circunferencia, estando situadas en los extremos opuestos del diámetro. En el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$ la energía cinética de las dos partículas era igual a $\mathscr{E}_0$. Determinar la ley según la cual decrece la energía cinética $\mathscr{E}$ de las partículas, condicionada por la radiación, suponiendo que se puede prescindir de la interacción de las cargas entre sí. La velocidad de decrecimiento de la energía cinética de las partículas es muy pequeña $\frac{d\mathscr{E}}{dt} \ll \omega\mathscr{E}$.

335. Dos cargas de magnitudes idénticas e giran por una circunferencia de radio R con una velocidad angular constante ω. Los radios trazados hacia los puntos de ubicación de las cargas forman entre sí un ángulo ψ. Determinar la magnitud del ángulo ψ bajo el cual las intensidades de radiación dipolar I_d y cuadripolar I_D del sistema dado sean iguales.

336. Un dipolo puntual con momento d gira por una circunferencia de radio R con una velocidad angular constante ω. El vector d es constante en módulo y en cada momento de tiempo está orientado según el radio de la circunferencia. Determinar las intensidades de radiación dipolar I_d, dipolar magnética I_μ y cuadripolar I_D en una aproximación de ondas largas $R \ll \lambda = c/\omega$.

337. Dos dipolos puntuales idénticos antiparalelos con momentos d y —d giran por una circunferencia de radio R con una velocidad angular constante ω, estando situados en los extremos opuestos del diámetro. Los momentos de los dipolos son constantes en módulo y en cada momento de tiempo están orientados por la tangente a la circunferencia. Determinar la intensidad I de radiación, admitiendo que $R \ll c/\omega$.

338. Dos dipolos puntuales antiparalelos con momentos d y —d se encuentran a distancia $2a$ uno del otro y giran con una velocidad angular constante ω en planos perpendiculares a la recta común en la cual éstos se encuentran.

Determinar la intensidad I de radiación de este sistema en la aproximación de ondas largas $a \ll c/\omega$.

339. La distancia $2a$ existente entre dos dipolos puntuales idénticos antiparalelos es considerablemente menor que la longitud de la onda que se emite $a \ll \lambda = c/\omega$. El momento dipolar de uno de ellos es $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$. El vector constante $\mathbf{d}_0$ es perpendicular a la recta que une a los dos dipolos. Comparar entre sí los valores medios de las intensidades de radiación dipolar magnética I_μ y cuadripolar I_D respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

340. Los momentos dipolares de dos pequeños e idénticos dipolos están orientados a lo largo de una misma recta en sentidos contrarios. Cada dipolo por separado es un sistema de dos partículas con masas m y cargas e y $-e$, vinculados entre sí por una fuerza cuasielástica, que oscilan con una frecuencia ω. La distancia entre los dipolos $2a$ es considerablemente menor que la longitud de la onda emitida. Determinar respecto al tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$ el valor medio de la ley según la cual disminuye la energía $\mathscr{E}$ de los dipolos si en el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$ la energía de éstos era $\mathscr{E}_0$.

341. Una esfera con carga esférica simétrica por el volumen experimenta pulsaciones de manera que la densidad espacial de la carga varía respecto al tiempo conforme a la ley $\rho = \rho(r, t)$, donde r es la distancia hasta el centro de la esfera. ¿Tendrá lugar radiación?

342. La carga Q está uniformemente distribuida dentro de una gota cuya superficie realiza oscilaciones armónicas cerca de una posición de equilibrio acorde con la ley $r = r_0 (1 + \varepsilon \cos^2 \theta \cos \omega t)$, donde r es la distancia desde el centro de la gota hasta un punto de su superficie, θ el ángulo polar en el sistema esférico de coordenadas, y las magnitudes r_0, ω y ε constantes ($\varepsilon \ll 1$). Considerando los miembros que contienen la mínima potencia del parámetro ε, determinar la intensidad I de radiación.

343. Un disco fino de radio R y carga homogénea gira en torno a su diámetro con una velocidad angular constante ω. La carga total del disco es igual a Q. Hallar la intensidad I de radiación.

344. Un anillo fino de radio R está cargado uniformemente con una densidad lineal q. El eje del anillo tiene un movimiento de precesión con velocidad angular constante ω en torno a otro eje que pasa por el centro del anillo for-

mando un ángulo θ respecto a su propio eje (fig. 4). Hallar la intensidad I de radiación.

345. La carga Q está uniformemente distribuida por una varilla fina de longitud $2l$ que gira en el plano en torno a su punto medio con una velocidad angular constante ω. Hallar la intensidad I de radiación.

346. Un elipsoide de revolución cargado con homogeneidad, cuyos semiejes son a y b, se balancea en el plano YZ en torno a su centro de tal forma que el ángulo entre su eje de simetría y el eje Z varía conforme a la ley armónica

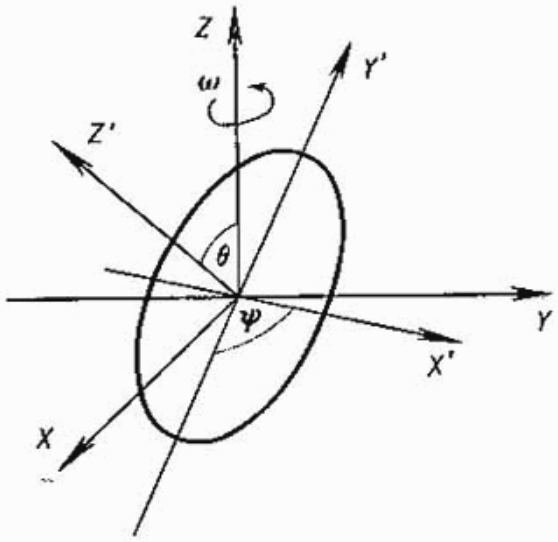


Fig. 4

$\theta = \theta_0 \cos \omega t$, donde $\theta_0 \ll 1$. La carga total del elipsoide es igual a Q, además el semieje b se encuentra sobre su eje de simetría. Considerando los términos que contienen la menor potencia del ángulo θ, hallar las intensidades de radiación dipolar magnética I_μ y cuadripolar I_D.

347. Un disco fino de forma elíptica con semiejes a y b tiene una carga uniforme de densidad superficial σ. La forma del disco varía con el tiempo, permaneciendo plana y desviándose poco de un círculo de radio R. La ley según la cual varía el parámetro de deformación $\frac{a-b}{a+b}$ se da por la expresión: $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$, donde β y ω son constantes ($\beta \ll 1$). El área del disco es equivalente a la superficie

del círculo de radio R y no cambia al deformarse si se desprecian los sumandos cuadráticos respecto al parámetro pequeño β. Considerando los miembros que contienen la mínima potencia de β, determinar el valor medio de la intensidad I de radiación cuadripolar respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

348. Un paralelepípedo rectangular con lados a, a y b está cargado uniformemente con densidad espacial ρ. Con el tiempo el paralelepípedo se deforma de tal manera que su superficie experimenta pequeñas oscilaciones armónicas en las aproximaciones de las superficies de un cubo de arista a_0. El parámetro de deformación $\frac{a-b}{a+b}$, se da por la expresión: $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$, donde β y ω son constantes ($\beta \ll 1$). El volumen del paralelepípedo es durante todo el tiempo constante e igual al volumen del cubo de arista a_0, en caso de que se desprecien los sumandos cuadráticos respecto al parámetro pequeño β. Hallar el valor medio de la intensidad I de radiación cuadripolar respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

349. En una región limitada del espacio se mueven las cargas e_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) con velocidades $\mathbf{v}_i$. Determinar las correcciones de orden $\frac{v_i^2}{c^2} \ll 1$ para el potencial vectorial e intensidad del campo magnético en la zona de onda. Aplicando los resultados obtenidos hallar las correcciones del mismo orden para la intensidad de radiación dipolar representando la fórmula de la siguiente forma:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \Delta I,$$

siendo $\mathbf{d}$ y $\boldsymbol{\mu}$ los momentos dipolar y magnético, $D_{\alpha\beta}$ el tensor del momento cuadripolar de las cargas en movimiento, mientras que la magnitud ΔI requiere que se determine. Por lo común el sumando ΔI se omite al expresar la intensidad de radiación de un sistema compuesto por cargas en movimiento lento, aunque éste, a partir del orden de magnitud, puede coincidir con las intensidades de radiación dipolar magnética y cuadripolar.

350. La intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico entre las armaduras de un condensador es homogénea y constante. Por el interior del condensador y paralelo al campo de $\mathbf{E}$

se mueve con una velocidad no relativista v una partícula con masa m y carga e. Aplicando el resultado del problema anterior, determinar la intensidad de radiación con una precisión hasta los miembros más pequeños de orden v^2/c^2.

§ 3. Descomposición espectral de la radiación

351. Un electrón con masa m y carga e se encontraba en reposo hasta el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$. En el tiempo $t > 0$ éste se mueve bajo la acción de un campo eléctrico cuya intensidad es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$. Hallar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada por el electrón en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$.

352. Por un segmento de longitud l fluye una corriente lineal $J = J_0 e^{-\alpha t}$ sen $\omega_0 t$, donde las magnitudes constantes satisfacen las desigualdades $\alpha l \ll c$ y $\omega_0 l \ll c$. En los instantes de tiempo $t \leqslant 0$ la corriente era igual a cero. Hallar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

353. Una esfera en reposo está cargada uniformemente con densidad espacial ρ por una carga positiva. Dentro de la esfera, a una distancia a de su centro, hasta el instante inicial de tiempo $t \leqslant 0$, se encontraba en reposo un electrón de masa m y carga e. Posteriormente, en el tiempo $t > 0$ éste se mueve bajo la acción del campo eléctrico de la esfera. Tomando en consideración la fuerza de rozamiento por radiación determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ de radiación dipolar que corresponde al intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

354. Un oscilador representa de por sí una partícula con masa m y carga e, la cual realiza oscilaciones armónicas con una frecuencia ω_0 bajo la acción de una fuerza elástica exterior. A partir del instante de tiempo $t_0 = 0$, sobre el oscilador en reposo comienza a ejercer influencia un campo eléctrico exterior con intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ la cual se expresa por una función continua que se convierte en cero al expirar un intervalo de tiempo finito. Tomando en consideración el frenado por radiación hallar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ de radiación dipolar del oscilador que corresponde al intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

355. Una partícula con masa m y carga e está suspensa de un hilo rígido imponderable y realiza pequeñas oscila-

ciones con frecuencia ω_0 en el campo de gravedad. Tomando en consideración la fuerza de rozamiento por radiación determinar el ancho $\Delta\omega$ de la raya espectral de radiación.

356. A una distancia considerable del emisor, en la zona de onda, en el momento de tiempo $0 \leqslant t$, con un instrumento de medir se ha registrado, la presencia de un campo eléctrico cuya intensidad es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$, donde las magnitudes α y ω_0 satisfacen la desigualdad $\alpha \ll \omega_0$. Determinar el ancho $\Delta\omega$ de la raya espectral de radiación, registrada por dicho instrumento.

357. El conjunto de átomos impuros excitados de un cristal ha emitido un impulso electromagnético que se propaga en el espacio libre en forma de onda plana

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\tau}\left|t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right|} \cos \omega_0 \left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right),$$

donde los vectores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{n}$, así como las magnitudes ω_0 y τ son constantes. La frecuencia portadora ω_0 del impulso y el tiempo de relajación τ del cristal están vinculados por la condición $\omega_0 \tau \gg 1$. Determinar el ancho $\Delta\omega$ de la raya espectral de radiación.

358. La intensidad del campo eléctrico de una radiación espontánea coherente de átomos de gas tiene la forma de onda plana

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{4T_0^2}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)^2} \cos \omega_0 \left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right),$$

donde ω_0 es la frecuencia de resonancia de la transición atómica, T_0 el tiempo de relajación de Doppler ($\omega_0 T_0 \gg 1$), $\mathbf{n}$ el vector unitario de la dirección de propagación de la onda y $\mathbf{E}_0$ un vector constante. Determinar el ancho $\Delta\omega$ de la raya espectral de radiación.

359. Una partícula con masa m y carga e, hasta el momento inicial de tiempo, se encontraba en reposo. En los posteriores momentos de tiempo ésta se mueve bajo la acción ejercida por un campo eléctrico constante homogéneo de intensidad E. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$, si la partícula cubrió la distancia l en la región donde actúa este campo.

360. Un electrón con masa m y carga e irrumpe en un semiespacio, en el cual la intensidad E del campo eléctrico

es homogénea y constante. La dirección de la velocidad $\mathbf{v}_0$ del electrón al irrumpir forma con el vector $\mathbf{E}$ un ángulo agudo α. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$ durante todo el tiempo de movimiento en el campo exterior.

361. Un protón con masa m y carga e pasa de largo a una gran distancia de impacto l ante un núcleo con carga Ze. A causa de que dicha distancia es grande, el ángulo de dispersión del protón resulta pequeño. La velocidad del protón antes de interaccionar con el núcleo era en valor absoluto igual a v_0. Determinar el número dN_ω de cuantos blandos radiados por el protón con frecuencias en el intervalo desde ω hasta $\omega + d\omega$, donde $\omega \ll v_0/l$. La energía del cuanto es $\hbar\omega$.

362. Dos partículas con masas m_1 y m_2 y cargas del mismo signo e_1 y e_2 avanzan en línea recta desde el infinito una al encuentro de la otra. Cuando la distancia mutua llega a ser igual a l las partículas se paran y a continuación comienzan a desplazarse en dirección opuesta alejándose hacia el infinito. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ de radiación dipolar que corresponde al intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$. Investigar la expresión obtenida en las regiones de frecuencias pequeñas y grandes.

363. En el momento inicial de tiempo $t_0 = 0$, dos partículas con masas m_1 y m_2 y cargas del mismo signo e_1 y e_2 se encontraban en reposo a una distancia l una de otra. A continuación, como resultado de la interacción coulombiana éstas se alejan a una distancia infinitamente grande. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ de radiación dipolar que corresponde al intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$. Investigar la expresión obtenida en las regiones de frecuencias tanto pequeñas como grandes. Compararla con las fórmulas análogas del problema anterior.

364. La energía de interacción de dos partículas cargadas es una función arbitraria de la distancia entre ellas y conduce a su repulsión mutua. Examinar dos casos de movimiento: a) las partículas se aproximan en línea recta y después de detenerse se alejan en dirección contraria a una distancia infinitamente grande; b) las partículas después de detenerse quedan en reposo (o, al contrario, las partículas en reposo, a partir de cierto momento de tiempo se alejan hacia el infinito). Demostrar que las descomposicio-

nes espectrales de la radiación dipolar en estos casos

$$d\mathscr{E}^a_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega)|^2 d\omega,$$

$$d\mathscr{E}^b_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega)|^2 d\omega$$

se expresan a través de una misma función compleja $f(\omega)$ mediante las correlaciones

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = 12 \operatorname{Re} f(\omega), \quad \ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = \mathbf{l} f(\omega),$$

siendo $\mathbf{l}$ un vector unitario constante, paralelo a la trayectoria rectilínea. Además, la función $f(\omega)$ satisface la condición

$$2\int_0^\infty (\operatorname{Re} f(\omega))^2 d\omega = \int_0^\infty |f(\omega)|^2 d\omega$$

y las energías totales de la radiación dipolar se diferencian entre sí en dos veces $\mathscr{E}^a = 2\mathscr{E}^b$.

365. El momento dipolar $\mathbf{d}$ tiene una orientación permanente, mientras que en módulo varía con el tiempo según una ley periódica cuyo período es $T = 2\pi/\omega_0$. Representar el valor medio de la intensidad J de radiación respecto al tiempo de un período, como la suma de radiaciones en armónicos separados con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental ω_0.

366. El momento magnético de corrientes que circulan en una región muy pequeña del espacio varía con el tiempo acorde con el principio $\mu = \mu_0 e^{-t^2/T^2}$, donde μ_0 es un vector constante y T una constante. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$ en un tiempo infinito comprendido entre $t = -\infty$ y $t = \infty$.

367. Por un cuadro fino y fijo, en un intervalo ilimitado de tiempo $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, fluye una corriente lineal $J = J_0 \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2}$, donde J_0 y τ son ciertas constantes. El área del cuadro es S y sus dimensiones lineales son pequeñas en comparación con la magnitud $c\tau$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$.

368. Dos dipolos puntuales iguales antiparalelos están situados en una recta y distan $2a$ uno de otro. A partir del instante de tiempo $t_0 = 0$ éstos realizan oscilaciones

armónicas amortiguadas. El momento de uno de los dipolos es $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t$, donde $\gamma \ll \omega_0$, además el vector $\mathbf{d}_0$ se encuentra sobre la recta que une los dipolos. La distancia entre los dipolos es pequeña en comparación con las longitudes fundamentales de las ondas emitidas. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

369. Resolver el problema anterior suponiendo que el vector $\mathbf{d}_0$ es perpendicular a la recta que une los dipolos puntuales.

370. Dos núcleos con números másicos A_1, A_2 y cargas $Z_1 e$, $Z_2 e$ avanzan desde el infinito por una misma recta al encuentro uno de otro. En el sistema del centro de inercia la energía cinética total de los dos núcleos, antes de interaccionar, era igual a $\mathscr{E}_0$. Después de detenerse éstos se alejan de nuevo hacia el infinito. La relación entre la carga y la masa de los mismos es idéntica $\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}$, donde m es la masa del nucleón, Z y A ciertos números. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$, radiada en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$. Investigar los casos límites de frecuencias pequeñas y grandes.

371. Un núcleo se desintegra en dos fragmentos con números másicos A_1, A_2 y cargas $Z_1 e$, $Z_2 e$, además la relación entre la carga y la masa en los fragmentos es idéntica $\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}$, siendo m la masa del nucleón, Z y A ciertos números. Posteriormente, bajo la influencia de la interacción coulombiana, los fragmentos se alejan a una distancia infinitamente grande, poseendo una energía sumaria $\mathscr{E}_0$. Las velocidades de éstos antes de alejarse eran nulas. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada en el proceso de alejamiento de los fragmentos en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$. Investigar los casos límites de frecuencias pequeñas y grandes. Comparar los resultados obtenidos con las fórmulas análogas del problema anterior.

372. Dos partículas cargadas tienen una misma relación entre la carga y la masa. La energía de interacción de estas partículas es una función arbitraria de la distancia entre ellas y conduce a su repulsión mutua. Examinar dos casos de movimiento: a) las partículas se aproximan en línea recta y después de detenerse se alejan en dirección contraria a una distancia infinitamente grande; b) las partículas

después de detenerse quedan en reposo (o al contrario, las partículas en reposo, a partir de cierto momento de tiempo se alejan hacia el infinito). Demostrar que las descomposiciones espectrales de la radiación cuadripolar en estos dos casos

$$d\mathscr{E}^a_\omega = \frac{|\dddot{D}^a_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5}\, d\omega,$$

$$d\mathscr{E}^b_\omega = \frac{|\ddot{D}^b_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5}\, d\omega$$

se expresan a través de una misma función compleja $f_{\alpha\beta}(\omega)$ mediante las correlaciones

$$\dddot{D}^a_{\alpha\beta}(\omega) = 2i \operatorname{Im} f_{\alpha\beta}(\omega),$$

$$\ddot{D}^b_{\alpha\beta}(\omega) = f_{\alpha\beta}(\omega).$$

La función $f_{\alpha\beta}(\omega)$ satisface la condición

$$2\int_0^\infty (\operatorname{Im} f_{\alpha\beta}(\omega))^2\, d\omega = \int_0^\infty |f_{\alpha\beta}(\omega)|^2\, d\omega,$$

y además las energías totales de la radiación cuadripolar se diferencian entre sí en dos veces $\mathscr{E}^a = 2\,\mathscr{E}^b$.

373. Una partícula con carga e choca, siendo su parámetro de impacto l, con la superficie lateral de un cono absolutamente elástico de altura h y radio de base R ($R > l$). La velocidad inicial de la partícula v es paralela al eje del cono. Determinar la energía de radiación dipolar $d\mathscr{E}_\omega$ en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

374. Un flujo homogéneo de partículas con carga e choca con una velocidad v contra una esfera absolutamente elástica de radio R. Hallar la radiación eficaz $d\varkappa_\omega$ en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$. La magnitud $d\varkappa_\omega$ se determina por la fórmula

$$d\varkappa_\omega = \int_0^\infty d\mathscr{E}_\omega \cdot 2\pi l\, dl,$$

donde $d\mathscr{E}_\omega$ es la energía de radiación dipolar en el intervalo de frecuencias $d\omega$ de aquella partícula que pasa teniendo el parámetro de impacto l.

§ 4. Distribución angular de la radiación

375. Una partícula con masa m y carga e se mueve perpendicularmente a un campo magnético constante homogéneo de intensidad $\mathbf{H}_0$. La velocidad de la partícula es en valor absoluto igual a v. Hallar el valor medio de la intensidad dI de radiación dipolar en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de movimiento de la partícula.

376. Un cuadro rectangular con corriente lineal continua J gira en torno a su diagonal con una velocidad angular constante ω. El área del cuadro es igual a S y sus dimensiones lineales son pequeñas en comparación con la longitud de la onda que se emite. Hallar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de rotación del cuadro.

377. Un protón con masa m y carga e abandona el núcleo fijo, cuyo radio es R y la carga residual Ze. Al abandonar el núcleo la velocidad del protón era igual a cero. Hallar la distribución angular $d\mathscr{E}_n$ de la energía total de radiación dipolar, condicionada por la interacción coulombiana entre el protón y el núcleo.

378. La carga Q rellena con homogeneidad el volumen de un cilindro de radio R y altura h. La superficie del cilindro experimenta pequeñas oscilaciones armónicas cerca de una posición de equilibrio definido por el radio R_0 y altura $h_0 = R_0$. La variación del parámetro de deformación $\frac{R-n}{R+n}$ con el tiempo se da por la expresión $\frac{R-h}{R+h} = \varepsilon \cos \omega t$, donde ε y ω son constantes ($\varepsilon \ll 1$). El volumen del cilindro es constante en el transcurso de todo el tiempo e igual a πR_0^3, si es que se desprecian los miembros cuadráticos respecto del parámetro pequeño ε. Hallar el valor medio de la intensidad dI de radiación cuadripolar en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

379. Un cilindro de radio R y altura h, cargado con homogeneidad gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje que pasa por el punto medio del cilindro perpendicularmente a su eje de simetría. La carga total es igual a Q. Determinar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de rotación.

380. Un cuadrípolo representa de por sí un sistema de cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado l. El signo de la carga e cambia por el opuesto al pasar al vértice vecino. Admitiendo que el cuadripolo gira en el plano XY en torno a su centro con una velocidad angular constante ω, determinar el valor medio de la distribución angular de la intensidad dI de radiación respecto al tiempo de un período de movimiento.

381. Una partícula con carga e y parámetro de impacto l choca, avanzando paralelamente al eje Z, con una esfera absolutamente elástica de radio R ($R > l$). El origen de las coordenadas está fijado en el centro de la esfera y la trayectoria de la partícula está sobre el plano XZ. Hallar la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$, radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$.

382. El momento cuadripolar D de un cuerpo de revolución varía con el tiempo conforme a la ley $D = D_0 e^{-(t/T)^2}$, donde D_0 y T son constantes. Hallar la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$ radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias desde ω hasta $\omega + d\omega$ en un tiempo infinito comprendido entre $t = -\infty$ y $t = \infty$

383. Al desintegrar un núcleo fijo de radio R se forma una partícula alfa con velocidad nula. La carga de dicha partícula es igual a Q y su radio es despreciablemente pequeño en comparación con R. Como resultado de la repulsión coulombiana la partícula alfa se aleja al infinito. Hallar la distribución angular $d\mathscr{E}_n$ de la energía total de radiación, tomando en consideración el sumando pequeño de orden $v/c \ll 1$, donde v es la velocidad de la mencionada partícula en el infinito.

384. Una partícula con masa m y carga positiva e cubre la distancia l en un campo eléctrico constante y homogéneo de intensidad E. La velocidad $\mathbf{v}_0$ de la partícula al irrumpir en el campo exterior era paralela al vector E. Determinar la distribución angular $d\mathscr{E}_n$ de la energía total de radiación, tomando en consideración el sumando pequeño de orden v/c, donde v es la velocidad de la partícula a su salida del campo exterior.

385. Un protón con masa m y carga e que se encontraba en estado de reposo es expulsado de un campo eléctrico constante homogéneo de intensidad E, después de cubrir por este campo la distancia l. La velocidad v del protón a la salida del campo exterior es considerablemente menor que

la velocidad de la luz. Determinar la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$ radiada por el protón en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias entre ω y $\omega + d\omega$, teniendo en cuenta el sumando pequeño de orden v/c.

386. Dos dipolos puntuales idénticos antiparalelos, situados sobre el eje X a una misma distancia a del origen de coordenadas, varían con el tiempo conforme a una ley armónica. En un punto con coordenada positiva el momento dipolar es paralelo al eje Y e igual a $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$. La distancia entre los dipolos es pequeña en comparación con la longitud de la onda emitida $a \ll \lambda = c/\omega$. Hallar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de oscilación de los dipolos.

387. Dos dipolos antiparalelos con momentos constantes $\mathbf{d}$ y $-\mathbf{d}$ se encuentran sobre los extremos de un diámetro y giran en el plano XY por una circunferencia de radio R con velocidad angular constante ω. El origen de las coordenadas se encuentra en el centro de la circunferencia y el eje Z es paralelo al vector $\mathbf{d}$. En la aproximación de ondas largas determinar el valor medio de la distribución angular de la intensidad dI de radiación respecto al tiempo de un período de movimiento.

388. A una misma distancia a del origen de coordenadas, sobre el eje Z, están situados dos dipolos antiparalelos con momentos $\mathbf{d}$ y $-\mathbf{d}$ los cuales giran con una velocidad angular constante ω en planos perpendiculares al eje Z. En la aproximación de ondas largas determinar el valor medio de la distribución angular de la intensidad dI de radiación respecto al tiempo de un período de rotación.

389. Un número N de dipolos puntuales con momentos $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ se encuentran sobre una recta a una misma distancia a cada uno de su vecino. El vector constante $\mathbf{d}_0$ está orientado arbitrariamente respecto al vector a que une dos dipolos vecinos. La distancia entre dos dipolos es comparable con la longitud de la onda emitida $a \sim c/\omega$. Examinando el campo electromagnético a grandes distancias del sistema, determinar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$.

390. Cinco dipolos puntuales idénticos con momentos $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ están situados como se señala en las figs. 5 y 6. El vector $\mathbf{d}_0$ es constante y la distancia entre los dipolos

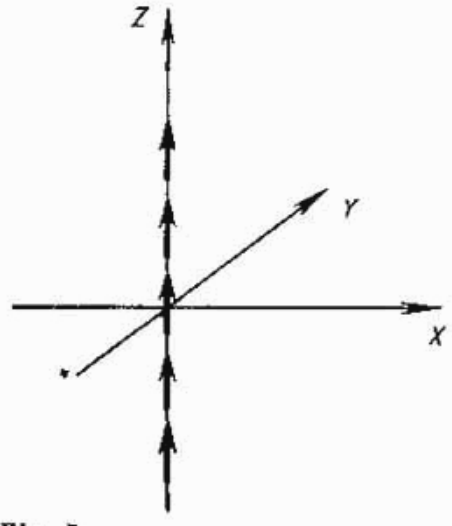


Fig. 5

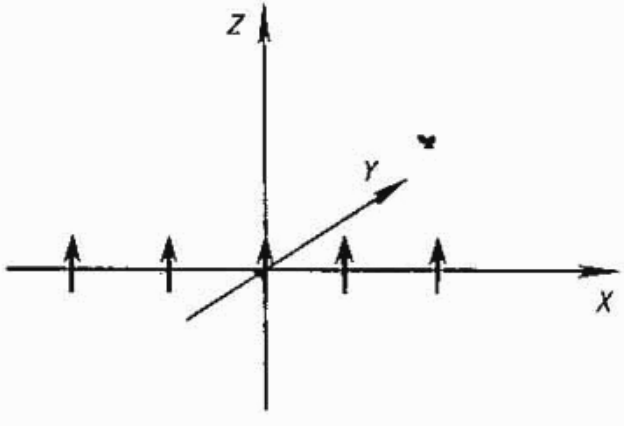


Fig. 6

igual a la longitud de la onda emitida c/ω. Determinar para los dos casos señalados el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$. Hallar las direcciones para las cuales la radiación resultará ser máxima.

§ 5. Polarización de las ondas radiadas

391. Una carga positiva e gira por una circunferencia de radio R con una velocidad angular constante ω. Determinar la polarización de las ondas de la radiación dipolar.

392. Un momento magnético gira en un mismo plano con una velocidad angular constante. Determinar la polarización de las ondas radiadas.

393. Un electrón con masa m y carga e avanza perpendicularmente a un campo magnético constante homogéneo de intensidad $\mathbf{H}_0$. La velocidad del electrón es en valor absoluto igual a v. Determinar la polarización de las ondas de la radiación cuadripolar.

394. Un electrón se encuentra en el campo electromagnético de una onda monocromática polarizada linealmente. Hallar la polarización de las ondas en la radiación dipolar coherente del electrón.

395. Un marco fino con corriente lineal tiene forma de circunferencia cuyo plano mantiene una posición fija en el espacio, mientras que el radio aumenta con el tiempo. Determinar la polarización de las ondas electromagnéticas radiadas.

396. Dos partículas idénticas cargadas se mueven en el espacio libre en línea recta, repulsándose una de otra. Determinar la polarización de las ondas radiadas.

397. La superficie de un elipsoide de rotación de semiejes a y b, con carga homogénea de densidad espacial ρ experimenta pequeñas oscilaciones armónicas cerca de la superficie de una esfera de radio R. El parámetro de deformación $\frac{a-b}{a+b}$ varía conforme a la ley $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$, donde $\beta \ll 1$ y el semieje b se encuentra sobre el eje de simetría axial del elipsoide. El volumen de este último no varía con el tiempo y es equivalente al de la esfera de radio R, en el caso que se desprecien los sumandos cuadráticos del parámetro pequeño β. Hallar el valor medio de la distribución angular de la intensidad dI de radiación, así como la intensidad total I de radiación en todas las direcciones respecto al tiempo de un período de oscilación, además determinar la polarización de las ondas emitidas. Este problema caracteriza el modelo de radiación durante las transiciones entre los niveles energéticos oscilatorios del núcleo.

398. Un elipsoide de rotación con semiejes a y b tiene una carga homogénea distribuida por el volumen y gira con una velocidad angular constante ω en torno a su semieje a que no es el eje de simetría axial (fig. 7). La carga total del elipsoide es igual a Q. Hallar el valor medio de la distri-

bución angular de la intensidad dI de radiación, así como la intensidad total I de radiación en todas las direcciones respecto al tiempo de un período de rotación, además deter-

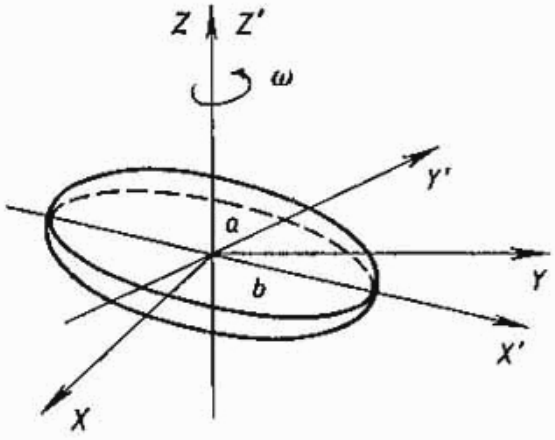


Fig. 7

minar la polarización de las ondas emitidas. Este problema caracteriza el modelo de radiación durante las transiciones entre los niveles energéticos rotacionales del núcleo.

§ 6. Dispersión de las ondas electromagnéticas

399. Una onda plana de polarización lineal incide sobre un electrón libre con masa m y carga e. Representar la sección eficaz de dispersión $d\sigma$ de la onda en el ángulo sólido $d\Omega$ como función de los ángulos de dispersión. ¿A qué es igual la sección total σ de dispersión?

400. Resolver el problema anterior considerando que la onda plana no está polarizada.

401. Una onda circular $\mathbf{E} = E_0 [\mathbf{l}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{l}_y \operatorname{sen}(\omega t + kz)]$ incide sobre un electrón libre con masa m y carga e. Hallar el valor medio de la intensidad dI de la radiación dispersada en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al período $T = 2\pi/\omega$. ¿A qué es igual la sección total σ de dispersión de la onda?

402. En el modelo de átomo de hidrógeno de Thomson un electrón con masa m y carga e efectúa un movimiento oscilatorio en el interior de una esfera inmóvil de radio R

cargada uniformemente con una carga positiva. Calcular la sección diferencial $d\sigma$ y total σ de dispersión de una onda plana polarizada circularmente en este átomo. La frecuencia ω de la onda incidente no coincide con la del átomo, mientras que la longitud de onda es grande en comparación con el diámetro de la esfera.

403. Tomando en consideración la fuerza de rozamiento por radiación, calcular la sección diferencial $d\sigma$ y total σ de dispersión de una onda plana polarizada linealmente en el átomo de hidrógeno, caracterizado por el modelo de Thomson (véase el problema anterior). La frecuencia ω de la onda incidente puede coincidir con la del átomo, mientras que la longitud de onda es grande en comparación con el diámetro del átomo.

404. Un electrón con masa m y carga e realiza un movimiento oscilatorio dentro de un cilindro cargado uniformemente con densidad espacial ρ. Tomando en consideración la fuerza de rozamiento por radiación determinar la sección diferencial $d\sigma$ y total σ de dispersión de una onda plana polarizada linealmente en el electrón. La longitud de la onda incidente es grande en comparación con el diámetro del cilindro, además el vector de polarización es perpendicular a su eje.

405. Determinar la sección diferencial $d\sigma$ y total σ de dispersión de una onda plana polarizada elípticamente

$$\mathbf{E} = \mathbf{l}_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + \mathbf{l}_y b_2 \operatorname{sen}(\omega t - kz + \alpha)$$

en un electrón libre de masa m y carga e.

406. Determinar la sección total σ de dispersión de la onda plana monocromática polarizada linealmente $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ en un neutrón libre, en el cual los momentos magnético μ y mecánico $\mathbf{M}$ están vinculados por la correlación $\mu = -\beta\mathbf{M}$. La frecuencia de precesión βH_0 del momento magnético es pequeña en comparación con la frecuencia ω de la onda incidente.

407. En el campo electromagnético de una onda polarizada elípticamente $\mathbf{E} = \mathbf{l}_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + \mathbf{l}_y b_2 \times \operatorname{sen}(\omega t - kz + \alpha)$ se encuentra un átomo en reposo, cuya polarizabilidad es β. La longitud de la onda es grande en comparación con las dimensiones lineales del átomo, por lo cual en éste, al situarlo en el campo eléctrico exterior, surge un momento dipolar $\mathbf{d} = \beta\mathbf{E}$. Determinar la

sección diferencial $d\sigma$ y total σ de dispersión de la onda electromagnética en el átomo.

408. El momento de inercia de un átomo respecto a un eje arbitrario que pasa por el centro de gravedad es igual a J, mientras que su momento dipolar eléctrico $\mathbf{d}$ tiene una probabilidad equivalente de orientación en el espacio. Determinar la sección total de dispersión de la onda plana polarizada linealmente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ en dicho átomo, mediada según la dirección del vector $\mathbf{d}$. Para simplificar las fórmulas admitir que la frecuencia Ω de rotación del vector $\mathbf{d}$ es despreciablemente pequeña en comparación con la frecuencia característica

$$\sqrt{dE_0/J}.$$

§ 7. Radiación de manantiales extendidos

409. En un volumen finito que confina con el vacío fluye una corriente con densidad espacial $\mathbf{j}$. En el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 esta última varía con el tiempo, mientras que fuera de este intervalo es por doquier igual a cero o constante. Los momentos de tiempo t_1 y t_2 son arbitrarios, en particular, pueden ser $t_1 \to \infty$ y $t_2 \to \infty$. Demostrar que en la zona de onda, donde las intensidades de los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ decrecen en módulo inversamente proporcional a la distancia hasta la corriente dada, se cumplen las igualdades

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\, dt = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\, dt = 0.$$

410. Por un segmento del eje Z $[-l, l]$ fluye una corriente lineal $J = J_0 \cos kz \operatorname{sen} \omega t$, siendo $\omega = kc$, $k = (2m + 1)\pi/2l$, m un número entero positivo, c la velocidad de la luz en el vacío. Hallar respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$ el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$. Este problema es un ejemplo de radiación de una antena lineal.

411. La magnitud $R = 2I/J_0^2$ se denomina resistencia de radiación de una antena lineal, donde I es, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, el promedio de intensidad de radiación de la corriente lineal $J = J_0 \cos kz \operatorname{sen} \omega t$

que fluye por la antena. Aplicando los resultados obtenidos en el problema anterior, representar la resistencia de radiación de la antena de la siguiente forma:

$$R = \frac{1}{c} \int_0^{(2m+1)2\pi} \frac{1-\cos x}{x}\, dx.$$

412. A lo largo de una antena lineal, ubicada en el eje Z, se propaga una onda de corriente $J = J(t - z/c)$, siendo $|z| \leqslant l$, c la velocidad de la luz en el vacío, $J(t - z/c)$ una función diferenciable. Determinar las intensidades de los campos de radiación eléctrico **E** y magnético **H**, en los puntos del plano XY a gran distancia de la antena, en la zona de onda.

413. Por un segmento del eje Z $[-l, l]$ en los momentos de tiempo $t \geqslant 0$ cluye una corriente lineal

$$J = J_0 \cos k_m z e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \omega_m t,$$

siendo $\omega_m = k_m c$, $k_m = (2m + 1)\,\pi/2l$, m un número entero positivo, c la velocidad de la luz en el vacío. Hallar las intensidades de los campos eléctrico **E** y magnético **H** en los puntos del plano XY, ubicados a grandes distancias r de la corriente ($r \gg k_m l^2$). Representar el campo electromagnético de radiación obtenido en forma de superposiciones de ondas monocromáticas con diversas frecuencias, considerando $\gamma \leqslant \omega_m$.

414. A lo largo de una antena lineal de longitud $2l$ se propaga una onda de corriente

$$J = J_0 \cos(\omega t - kz),$$

donde $\omega = kc$, $|z| \leqslant l$, c la velocidad de la luz en el vacío. Determinar el valor medio de la distribución angular de la intensidad de radiación de la antena respecto al tiempo de un período de oscilación de la corriente.

415. Un número N de antenas lineales paralelas de longitud $2l$ están situadas sobre el plano XY a una misma distancia una de otra. El vector a que une dos antenas vecinas es paralelo al eje X. La distancia entre las antenas es comparable con la longitud de la onda emitida $a \sim c/\omega$. A lo largo de cada antena fluye una corriente lineal

$$J = J_0 \operatorname{sen} kz \cos \omega t,$$

siendo $|z| \leqslant l$, $\omega = kc$, $k = m\pi/l$, m un número entero positivo, c la velocidad de la luz en el vacío. Determinar la intensidad **H** del campo magnético de radiación a grandes distancias $r \gg l^2/a$ de la antena. Hallar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 4l/c$.

416. Por una lámina infinitamente fina ($-b \leqslant x \leqslant b$, $-l \leqslant z \leqslant l$), paralelamente al eje Z, fluye una corriente con densidad superficial $i = i_0 \operatorname{sen} kz \cos \omega t$, siendo $\omega = kc$, $k = m\pi/l$, m un número entero positivo, c la velocidad de la luz en el vacío. El ancho y la longitud de la lámina son comparables con la longitud de la onda emitida. Determinar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 4\,l/c$.

417. Paralelamente al eje de una superficie cilíndrica de radio R se propaga una onda de corriente con densidad superficial $i = i_0 \cos(\omega t - kz)$, siendo $|z| \leqslant l$, $\omega = kc$, c la velocidad de la luz en el vacío. La longitud de onda c/ω es comparable con el radio R. Determinar el valor medio de la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período de oscilación de la corriente.

418. El eje Z coincide con los ejes de dos conos circulares idénticos situados simétricamente respecto al plano XY y que tienen el vértice común en el origen del sistema cartesiano de coordenadas. La generatriz de cada cono es de longitud b y forma con su eje el ángulo θ_0. La corriente total que fluye por las superficies laterales se expresa por la función $J = J(r, t)$, donde r es la distancia hasta el vértice común. La corriente fluye por las generatrices de los conos. Determinar la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$. Investigar las expresiones límites de la fórmula obtenida para dos casos: $\theta_0 \to 0$ y $\theta_0 = \pi/2$.

§ 8. Problemas que requieren cálculos en computadoras

419. Un electrón con energía $\mathscr{E} = e^2/2a$ se dispersa en el átomo de hidrógeno, cuyo campo eléctrico se define por el potencial $\varphi(r) = e(1/r + 1/a)\, e^{-2r/a}$, siendo e la carga del protón, $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ el radio de Bhor, m la masa del electrón, $\hbar$ la constante de Planck. Determinar la energía total

$\mathcal{E}_d$ de la radiación dipolar durante la dispersión. Empleando los cálculos obtenidos en computadoras trazar la curva de la energía radiada $\mathcal{E}_d$ como función del parámetro de impacto l del electrón que pasa.

420. Un flujo de partículas con masa m, carga e y energía $\mathcal{E}_0$ se mueve en un campo potencial esférico-simétrico $U(r) = U_0 e^{-r/a}$, donde a y U_0 son unas constantes positivas. Hallar la radiación eficaz $\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi l \, dl$. Aquí $\Delta\mathcal{E}$ es la energía total de la radiación dipolar de la partícula que pasa con un parámetro de impacto l. Utilizando cálculos en computadoras, construir la curva de radiación eficaz $\varkappa$ como función de $\mathcal{E}_0$ en la región $0{,}1\ U_0 \leqslant \mathcal{E}_0 \leqslant 10\ U_0$.

421. Una partícula con carga Q avanza en línea recta con velocidad v a lo largo de un oscilador cargado que al principio se encuentra en reposo y cuya propia frecuencia es ω_0, además su carga y masa son iguales a e y m respectivamente. La distancia l desde el centro del oscilador hasta la trayectoria rectilínea de movimiento de la partícula es tan grande que se puede desestimar la variación de la velocidad v. Menospreciando igualmente la fuerza de rozamiento por radiación, trazar la curva de la intensidad I de radiación del oscilador bajo la acción de la partícula cargada que pasa. Para los cálculos en la computadora admitir que $v = \omega_0 l$ y que la amplitud de las oscilaciones del generador de éstas es pequeña en comparación con l.

422. Sobre un oscilador cargado que posee rozamiento y está en reposo, a partir de un instante de tiempo $t = t_0$, comienza a actuar una fuerza exterior $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{-t^2/\tau^2}$ de tal forma que la ecuación de su movimiento adquiere la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{-t^2/\tau^2},$$

siendo ω_0 y m la frecuencia propia y masa del oscilador, mientras que el factor γ caracteriza las pérdidas energéticas, condicionadas por el rozamiento. La carga de la partícula oscilante es e. Admitiendo que $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$ y utilizando métodos numéricos trazar y comparar entre sí las curvas de la intensidad I de radiación del oscilador bajo

la acción que ejerce la fuerza exterior $\mathbf{F}$ en dos casos: $t_0 = 0$ y $t_0 = -\infty$.

423. Un núcleo pesado con carga Q avanza con una velocidad v por una trayectoria rectilínea a gran distancia l de un átomo en reposo eléctricamente neutro, cuya polarizabilidad es β. Esto último significa que en el átomo, en el campo eléctrico exterior de intensidad $\mathbf{E}$, surje un momento dipolar eléctrico $\mathbf{d} = \beta\mathbf{E}$. Menospreciando la variación de la velocidad v del núcleo en movimiento, hallar la energía $d\mathscr{E}_\omega$, radiada por el átomo polarizado en frecuencias comprendidas en el intervalo ω y $\omega + d\omega$. Utilizando métodos numéricos construir la curva $d\mathscr{E}_\omega/d\omega$ de la descomposición espectral de la radiación.

424. Dos núcleos tienen números másicos A_1, A_2 y cargas Z_1e, Z_2e. En el sistema del centro de inercia su energía sumaria es $\mathscr{E}_0$. La masa del nucleón es m. Examinar dos casos de movimiento: *a*) los núcleos se aproximan en línea recta y después de detenerse se separan alejándose hacia el infinito; *b*) los núcleos, a partir de un momento determinado $t = 0$, se alejan hacia el infinito siendo fragmentos de un núcleo grande (en el momento inicial de tiempo $t = 0$ sus velocidades eran igual a cero). Determinar la densidad espectral de radiación $d\mathscr{E}^a_\omega/d\omega$ y $d\mathscr{E}^b_\omega/d\omega$ para los casos *a* y *b*. Utilizando métodos numéricos trazar y comparar entre sí las curvas de la descomposición espectral de la intensidad en los casos mencionados.

425. Resolver el problema anterior admitiendo que la relación entre la carga y la masa en los núcleos es idéntica

$$\frac{Z_1e}{A_1m} = \frac{Z^2e}{A_2m} = \frac{Ze}{Am}.$$

426. Por el espacio, en dirección del vector unitario $\mathbf{n}$, se propaga una onda electromagnética en la cual la intensidad del campo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(t'/\tau)^4} \cos \omega_0 t',$$

siendo $t' = t - \frac{\mathrm{nr}}{c}$ y $\mathbf{E}_0$ un vector constante, además los parámetros τ y ω_0 satisfacen la desigualdad $\omega_0\tau \gg 1$. Utilizando métodos numéricos, trazar la línea espectral $\mathscr{E}(\omega)$ de radiación, que se propaga en forma de este impulso electromagnético concreto. Determinar el ancho $\Delta\omega$ de la raya espectral.

427. Por una lámina infinitamente fina ($-b \leqslant x \leqslant b$, $-l \leqslant z \leqslant l$), paralelamente al eje Z, se propaga una onda de corriente con densidad superficial igual a:

$$\mathbf{i} = \mathbf{l}_z i_0 \exp\left[-\frac{1}{\tau^6}\left(t - \frac{z}{c}\right)^6\right],$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, i_0 y τ son constantes. Determinar las intensidades de los campos de radiación eléctrico **E** y magnético **H** en los puntos del eje X a grandes distancias r de la lámina. Considerando que $b = l = c\tau$ construir la curva de la intensidad del campo eléctrico como función del tiempo para cierto punto fijo de observación en la zona de onda. Trazar la línea espectral $\mathcal{E}(\omega)$ de radiación que pasa por dicho punto.

428. En dirección del eje de un cilindro de altura $2h$ y radio R se propaga una onda de corriente con densidad espacial $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-(r/R)^8} \cos(kz - \omega t)$, siendo $\omega = kc$, r y z coordenadas cilíndricas. El vector constante $\mathbf{j}_0$ es paralelo al eje Z. El origen de las coordenadas está fijado en el punto central del cilindro. Determinar respecto a un período $T = 2\pi/\omega$ el valor medio de la intensidad de radiación por unidad del ángulo sólido $dI/d\Omega$ como función del ángulo polar θ, contándolo desde el eje del cilindro. Trazar el diagrama de directividad de radiación trazando en forma de un segmento el valor numérico de la magnitud $dI/d\Omega$ para cada ángulo θ en un radio que conforma el mismo ángulo con el eje polar, el cual coincide con el del cilindro. Para realizar los cálculos en la computadora suponer que $h = R = 1/k$.

429. Un vibrador bicónico está constituido por superficies de dos conos circulares idénticos con eje común y cuyos vértices están en contacto. La generatriz de cada cono es de longitud l y forma con su eje un ángulo $\pi/4$. Por la superficie bicónica, en dirección de la generatriz, fluye una corriente total $J = J_0 \cos kr \operatorname{sen} \omega t$, donde $k = \omega/c = \pi/2l$ y r es la distancia hasta el vértice común. Determinar respecto a un período $T = 2\pi/\omega$ el valor medio de la intensidad de radiación por unidad del ángulo sólido $dI/d\Omega$ como función del ángulo polar θ, contándolo desde el eje del vibrador. Utilizando métodos numéricos construir la curva de la magnitud $dI/d\Omega$ como función del ángulo θ.

430. Desde un punto del espacio con radio vector $\mathbf{r} = 0$ se ha emitido, a partir de un momento de tiempo $t = 0$,

un impulso de corriente, el cual comienza a propagarse en todas las direcciones con una intensidad espacial $\mathbf{j} = \frac{(\mathbf{lr})\,\mathbf{r}}{r^2} F(r, t)$. Aquí $\mathbf{l}$ es un vector unitario constante y $F(r, t)$ una función arbitraria de módulo r del radio vector y del tiempo t. Determinar las intensidades de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{H}$ en la zona de onda, donde estas magnitudes decrecen en proporción inversa a la distancia hasta la corriente. Construir la curva de la intensidad del campo de radiación como función del tiempo para cierto punto de observación prefijado en la zona de onda, considerando que

$$F(r, t) = j_0 \frac{\lambda^2 e^{-r/\lambda}}{r^2} \cdot \frac{t - r/c}{\tau} e^{-1/\tau(t-r/c)},$$

donde $t \geqslant r/c$, c es la velocidad de la luz en el vacío y las constantes λ y τ están vinculadas por la condición $c\tau = 10\lambda$.

Capítulo V CAMPO DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS CARGADAS

Se denomina sistema de referencia inercial a un sistema constituido por una terna de ejes coordenados para medir el espacio y un reloj para medir el tiempo. En un determinado sistema de referencia inercial, cualquier acontecimiento puede ser designado por las coordenadas x, y, z del espacio donde éste tuvo lugar y por el tiempo t de cuando ha sucedido.

Cada acontecimiento puede expresarse por un punto en el espacio cuadridimensional (o tetradimensional) el cual se caracteriza por un radio vector de cuatro dimensiones x_i cuyas componentes son:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y,$$
$$x_3 = z, \quad x_4 = ict. \tag{V.1}$$

La suma de los cuadrados de las componentes del 4-radio vector (o radio cuadrivector)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{V.2}$$

representa de por sí el cuadrado de la distancia del punto (V.1) hasta el origen de las coordenadas y define la métrica del espacio cuadridimensional dado.

Supongamos que el sistema inercial de coordenadas con tilde $X'Y'Z'$ se mueve a lo largo del eje X con una velocidad V respecto al sistema de coordenadas en reposo XYZ. Los ejes cartesianos homónimos son paralelos y en el instante de tiempo $t = 0$ los orígenes de estos dos sistemas de coordenadas coincidían (fig. 8). Entonces, las coordenadas y tiempo de un mismo acontecimiento, registrados en los sistemas de referencia inerciales señalados, están vinculados

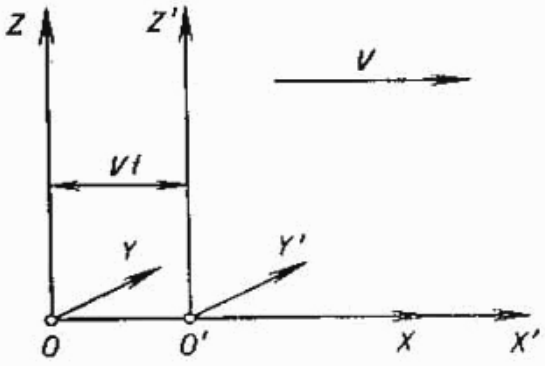


Fig. 8

entre sí por la transformación de Lorentz.

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{V.3}$$

o en símbolos cuadridimensionales

$$x_1 = \frac{x_1' - i\frac{V}{c} x_4'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{x_4' + i\frac{V}{c} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

La última transformación conviene expresarla en forma de matriz*)

$$x_i = a_{ih} x_h', \tag{V.4}$$

$$a_{ih} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \tag{V.5}$$

*) En este capítulo, por los subíndices de matriz y tensoriales que se repiten dos veces y designados con letras latinas (i, k, l, . . .) se supone la suma comprendida entre 1 y 4, además el símbolo de la suma se omite. Mientras tanto, los subíndices griegos (α, β, γ, . . .) recorren los mismos valores de antes, desde 1 hasta 3.

Las fórmulas de la transformación inversa se obtienen cambiando el signo de las velocidades V por el opuesto

$$x_i' = a_{ik}^{-1} x_h = a_{ik}^T x_h. \qquad (V.6)$$

Ya que la matriz (V.5) satisface la condición $a_{ik}^{-1} = a_{ki}$, la transformación de Lorentz (V.4) es una transformación lineal y ortogonal de las coordenadas en un espacio cuadridimensional. Esta transformación caracteriza la transición de un sistema de coordenadas $(X_1X_2X_3X_4)$ a otro $(X_1'X_2'X_3'X_4')$, girado en el plano X_1X_4 en cierto ángulo. La magnitud (V.5) representa de por sí la matriz de esta transformación lineal y ortogonal.

En un espacio cuadridimensional se denomina vector A_i (cuadrivector o 4-vector) al conjunto de cuatro magnitudes A_1, A_2, A_3 y A_4 las cuales al efectuar una transformación ortogonal de las coordenadas se transforman como componentes de un 4-radio vector:

$$A_i = a_{ik} A_k', \quad A_i' = a_{ik}^{-1} A_k, \qquad (V.7)$$

donde a_{ik} es la matriz de una transformación lineal ortogonal arbitraria de las coordenadas en el espacio cuadridimensional. En particular, ésta puede tener la forma (V.5).

Para el 4-vector se ha adoptado la designación

$$A_i = (\mathbf{A}, A_4), \qquad (V.8)$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{l}_x A_1 + \mathbf{l}_y A_2 + \mathbf{l}_z A_3$. Las tres primeras componentes A_1, A_2 y A_3 del 4-vector se denominan espaciales, mientras que la cuarta A_4 — temporal.

De igual modo, se denomina tensor cuadridimensional de segundo rango al conjunto de dieciséis magnitudes T_{ik}, las cuales al efectuar una transformación ortogonal de las coordenadas se transforman como producto de las componentes de un 4-radio vector.

$$T_{ik} = a_{il} a_{km} T_{lm}', \quad T_{ik}' = a_{il}^{-1} a_{km}^{-1} T_{lm}. \qquad (V.9)$$

Una magnitud se denomina escalar si no varía su valor numérico al pasar a cualquier sistema cuadridimensional de coordenadas girado. Por ejemplo, el producto escalar $A_iB_i = \mathbf{AB} + A_4B_4$ de los 4-vectores A_i y B_i satisface dicha propiedad puesto que es invariante respecto a la rotación del sistema cuadridimensional de coordenadas

$$A_iB_i = A_i'B_i' = \text{inv}. \qquad (V.10)$$

El impulso $\mathbf{p}$ y energía $\mathscr{E}$ de una partícula con masa m

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{V.11}$$

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{V.12}$$

constituyen un 4-vector p_i de energía-impulso (o simplemente 4-impulso)

$$p_i = \left(\mathbf{p},\ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right). \tag{V.13}$$

Esta magnitud frecuentemente la representan en la forma siguiente $p_i = mcu_i$, introduciendo la noción 4-velocidad:

$$u_i = \left(\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{V.14}$$

Las componentes de la velocidad cuadridimensional satisfacen la condición $u_i^2 = -1$, por lo que se puede escribir

$$\mathbf{p}^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = -m^2c^2. \tag{V.15}$$

De las fórmulas (V.11) y (V.12) se deducen correlaciones útiles

$$\mathbf{p} = \mathscr{E}\frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad \mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}, \quad T = \mathscr{E} - mc^2, \tag{V.16}$$

donde la magnitud T se denomina energía cinética de una partícula relativista y el valor mc^2 — energía en reposo.

Diferenciando respecto al tiempo ambas partes de la igualdad (V.15) y valiéndose de la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}, \tag{V.17}$$

resulta fácil determinar la velocidad de variación de la energía cinética de una partícula en el campo exterior de fuerza $\mathbf{F}$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\mathscr{E}}{dt} = \mathbf{vF}. \tag{V.18}$$

A la par que la fuerza tridimensional, que actúa sobre una partícula, se introduce la noción 4-vector de fuerza f_i

con las componentes

$$f_i = \left(\frac{\mathbf{F}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad i\frac{\mathbf{vF}}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \qquad \text{(V.19)}$$

donde v es la velocidad de la partícula. La fuerza cuadridimensional está incluida en la parte derecha de la ecuación covariante de movimiento

$$mc = \frac{du_i}{ds} = f_i. \qquad \text{(V.20)}$$

Aquí $ds = c\,dt\sqrt{1-v_2/c^2}$ y $\frac{du_i}{ds} = w_i$ es la aceleración cuadridimensional, ortogonal, al 4-vector de la velocidad $w_i u_i = 0$ y contiene las siguientes componentes

$$w_i = \left(\frac{1}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \right.$$

$$\left. \frac{i}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \qquad \text{(V.21)}$$

Las densidades espaciales de la corriente j y carga ρ forman el 4-vector de la densidad de la corriente

$$j_i = (\mathbf{j},\ ic\rho), \qquad \text{(V.22)}$$

mientras que los potenciales vectorial A y escalar φ forman el 4-vector

$$A_i = (\mathbf{A},\ i\varphi), \qquad \text{(V.23)}$$

que se denomina 4-potencial.

Las correlaciones (IV.1) y (IV.2) que definen los potenciales vectorial y escalar se escriben, en símbolos cuadridimensionales, de forma única

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \qquad \text{(V.24)}$$

donde la magnitud F_{ik} se denomina tensor del campo electromagnético. Las intensidades de los campos eléctrico E y magnético H son componentes de este tensor antisimétrico

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{vmatrix}. \qquad \text{(V.25)}$$

Con ayuda del tensor del campo electromagnético, las ecuaciones de Maxwell (III.1) ... (III.4) pueden ser expresadas en forma covariante

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = -\frac{4\pi}{c} j_k, \qquad (V.26)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \qquad (V.27)$$

Las fórmulas (V.9) y (V.25) permiten obtener la ley de transformación de los campos eléctrico y magnético al pasar de un sistema de referencia inercial a otro (véase fig. 8)

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (V.28)$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (V.29)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - 1/c\,(\mathbf{V} \times \mathbf{H}'_{\perp})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (V.30)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}'_{\perp} + 1/c\,(\mathbf{V} \times \mathbf{E}'_{\perp})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (V.31)$$

donde los signos $\parallel$ y $\perp$ señalan la componente del vector que respectivamente es paralela y perpendicular a la velocidad $\mathbf{V}$.

De los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ resulta fácil constituir magnitudes invariantes respecto a la transformación de Lorentz

$$E^2 - H^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{EH} = \text{inv}. \qquad (V.32)$$

Aplicando las invariantes (V.10) y (V.32) para la onda electromagnética plana monocromática

$$\mathbf{E} = \mathbf{l} E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad \mathbf{H} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \frac{c}{\omega}, \qquad (V.33)$$

se llega a la conclusión que los vectores de las intensidades de los campos eléctrico y magnético de ésta son equivalentes en módulo y ortogonales en todos los sistemas de referencia inerciales, mientras que la fase de la onda es invariante

$$\omega t - \mathbf{kr} = -k_i x_i = \text{inv}, \qquad \text{(V.34)}$$

donde $k_i = \left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$ es el 4-vector de onda.

El tensor energía-impulso del campo electromagnético

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{lk} + 1/4F_{lm}^2\delta_{ik}\right) \qquad \text{(V.35)}$$

tiene las propiedades $T_{ik} = T_{ki}$ y $T_{ii} = 0$. Sus componentes temporal T_{44} y espacio-temporal $T_{\alpha 4}$ están vinculadas con la densidad de la energía $w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ y la densidad del impulso $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ del campo electromagnético de la siguiente manera

$$T_{44} = w, \quad T_{\alpha 4} = -icg_\alpha. \qquad \text{(V.36)}$$

La densidad del impulso g del campo electromagnético es proporcional a la densidad del flujo de energía electromagnética (al vector de Poynting $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$)

$$\mathbf{g} = 1/c^2\mathbf{s}. \qquad \text{(V.37)}$$

Las nueve componentes espaciales del 4-tensor (V.35) forman un tensor maxweliano tridimensional de tensión

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - 1/2\,(E^2 + H^2)\,\delta_{\alpha\beta}\right]. \qquad \text{(V.38)}$$

La fuerza aplicada a la superficie cerrada S en el campo electromagnético se expresa mediante el tensor maxweliano de tensión (V.38)

$$F_\alpha = \oint_S T_{\alpha\beta}N_\beta\, dS, \qquad \text{(V.39)}$$

donde F_α es una componente de la fuerza y N el versor de la normal exterior a la superficie cerrada S.

La ecuación de movimiento (V.20) de una partícula aislada con masa m y carga e en un campo electromagnético exterior, tiene en forma cuadridimensional el aspecto

$$mc = \frac{du_i}{dS} = \frac{e}{c}F_{ik}n_k. \qquad \text{(V.40)}$$

La parte espacial de esta igualdad vectorial cuadridimensional, después de reducir el factor común, coincide con la ecuación de Newton (V.17) en cuya parte derecha figura la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = e\,[\mathbf{E} + 1/c\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H})]. \qquad (V.41)$$

El campo electromagnético de una carga e que se mueve con una velocidad arbitraria $\mathbf{v}$ se define por los potenciales de Liénard—Wiechert

$$\varphi = \frac{e}{R - \frac{\mathbf{vR}}{c}}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad (V.42)$$

siendo $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e\,(t')$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_e\,(t')$ los radios vectores de los puntos de observación y ubicación de la carga. El momento retardado de tiempo t' está vinculado con el tiempo de observación t por la condición

$$t' = t - 1/c\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\,(t')\,|. \qquad (V.43)$$

Las intensidades de los campos eléctrico y magnético de una carga en movimiento se hallan diferenciando los potenciales de Liénard—Wiechert

$$\mathbf{E} = \frac{e\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right)}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)^3} + \frac{e\left(\mathbf{R} \times \left(\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right)\right)}{c^2\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)^3}, \qquad (V.44)$$

$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{R} + \mathbf{E})}{R}. \qquad (V.45)$$

Los campos eléctrico (V.44) y magnético (V.45) están compuestos de dos partes características. La primera es función de la velocidad de la carga puntual y decrece con la distancia como $1/R^2$. Esta parte se desplaza con la carga sin separarse de ella, ya que el flujo de energía de este campo a través de una esfera de radio R tiende a cero cuando $R \to \infty$. La segunda parte depende no sólo de la velocidad sino que también de la aceleración y disminuye conforme a la ley $1/R$. Esto conlleva a que el flujo del vector de Poynting, a través de una esfera de radio infinitamente grande, difiere de cero. Por consiguiente, la segunda parte de los campos (V.44) y (V.45) caracteriza la radiación de las

ondas electromagnéticas de una carga en movimiento acelerado.

La intensidad de radiación de una carga e en el ángulo sólido $d\Omega$

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2(t)\, R^2 d\Omega \qquad \text{(V.46)}$$

contiene solamente el segundo sumando de la expresión (V.44) que después de una simple transformación toma la forma

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^6} \right\} d\Omega, \qquad \text{(V.47)}$$

donde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ es el vector unitario en la dirección de radiación y las demás magnitudes en la parte derecha de la igualdad (V.47) se toman en el momento retardado de tiempo (V.43).

Si en los límites de la región eficaz donde se mueve la carga se tiene en cuenta el retardo de la señal electromagnética emitida, los valores de las intensidades de radiación (V.46) y (IV.22), en virtud de su definición, se diferencian entre sí. Esto está relacionado con que los flujos del vector de Poynting a través de superficies esféricas de radios considerablemente grandes r y R en un mismo instante de tiempo t son diferentes, ya que los centros de las esferas mencionadas no coinciden.

En el caso de que la velocidad y aceleración de la carga sean paralelas, la fórmula (V.47) se simplifica

$$dI = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} d\Omega, \qquad \text{(V.48)}$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad y la dirección de radiación. Para los vectores $\mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{v}}$, recíprocamente perpendi-

culares, tenemos

$$dI = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\psi}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} \right] d\Omega. \qquad (V.49)$$

En esta fórmula θ es el ángulo entre la velocidad $\mathbf{v}$ y el vector unitario $\mathbf{n}$ de la dirección de radiación, mientras que ψ es el ángulo azimutal del vector $\mathbf{n}$ con el plano que pasa por la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ de la carga.

La radiación en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ durante todo el tiempo de movimiento de la carga e se da por la fórmula

$$d\mathscr{E}_n = \frac{e^2}{4\pi c^3} d\Omega \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{v}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^5} \right\} dt', \qquad (V.50)$$

en la cual se utiliza la correlación

$$dt = \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) dt'. \qquad (V.51)$$

Cada carga que se mueve con aceleración emite ondas electromagnéticas que transportan energía e impulso. La energía $d\mathscr{E}_{rad}$ e impulso $d\mathbf{P}_{rad}$ radiados en el transcurso del tiempo dt se expresan por las fórmulas

$$d\mathscr{E}_{rad} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{\mathbf{F}^2 - 1/c^2\,(\mathbf{vF})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \qquad (V.52)$$

$$d\mathbf{P}_{rad} = \frac{2e^2}{3m^2c^5} \frac{\mathbf{F}^2 - 1/c^2\,(\mathbf{vF})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v}\, dt, \qquad (V.53)$$

donde e y m son la carga y masa de la partícula que se mueve con una velocidad v en el campo de fuerza F conforme a la ecuación de Newton (V.17).

A veces, las partes derechas de las igualdades (V.52) y (V.53) se escriben de otra forma:

$$d\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - 1/c^2 (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt, \qquad \text{(V.54)}$$

$$d\mathbf{P}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^5} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - 1/c^2 (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \mathbf{v}\, dt, \qquad \text{(V.55)}$$

donde v y $\dot{\mathbf{v}}$ son la velocidad y aceleración de la carga e.

En un campo electromagnético exterior con intensidades E y H, la magnitud F, si no se tiene en cuenta la acción inversa de la radiación sobre la partícula cargada, coincide con la fuerza de Lorentz (V.41) y entonces, las fórmulas (V.52) y (V.53) se reducen a la siguiente forma:

$$d\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{(\mathbf{E} + 1/c\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}))^2 - 1/c^2\,(\mathbf{vE})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \qquad \text{(V.56)}$$

$$d\mathbf{P}_{\text{rad}} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} \frac{(\mathbf{E} + 1/c\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}))^2 - 1/c^2\,(\mathbf{vE})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v}\, dt. \qquad \text{(V.57)}$$

La velocidad con que una partícula cargada pierde energía para radiación de ondas electromagnéticas, durante su movimiento por un campo F de fuerza, se caracteriza por la expresión

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}_c}{dt}\right)_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{\mathbf{F}^2 - 1/c^2\,(\mathbf{vF})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \text{(V.58)}$$

donde $\mathscr{E}_c$ es la energía de la partícula en dicho campo.

Si en la ecuación de movimiento (V.17) se toma en consideración la fuerza de rozamiento por radiación, esto puede influir considerablemente sobre el radio vector $\mathbf{r}_e(t)$, la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y aceleración $\dot{\mathbf{v}}(t)$ de la partícula cargada, lo que a su vez se reflejará en las partes derechas de las correlaciones (V.47) ... (V.58).

La intensidad total de radiación en todas las direcciones

$$I = \frac{c}{4\pi} \int E^2(t)\, R^2 d\Omega \qquad \text{(V.59)}$$

en sentido físico y valor numérico difiere de la velocidad de pérdida de energía para la radiación (V.58) de la partícula cargada, aunque estas dos magnitudes poseen unas mismas dimensiones. Dichas magnitudes coinciden solamente en el caso extremo de movimiento lento de una partícula cargada con velocidad $v \ll c$, cuando puede menospreciarse el retardo de la señal electromagnética emitida dentro de la región efectiva de movimiento. En este caso las fórmulas (V.59) y (V.58) coinciden con las expresiones análogas (IV.16) y (IV.31) si estas últimas se aplican a la radiación de una carga aislada.

Si el radio vector $\mathbf{r}_e(t)$ de una carga e varía con el tiempo de modo prefijado, la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$ radiada en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$ tiene la forma

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_e(t))\, e^{i\omega\left(t - \frac{n r_e(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega d\omega \qquad \text{(V.60)}$$

En particular, si la velocidad de la partícula cargada varía de súbito como resultado de una colisión, la correlación (V.60) se escribe de la siguiente manera

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{n}_1}{c}} - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_2}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}^2}{c}} \right)^2 d\Omega d\omega, \qquad \text{(V.61)}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades de la partícula antes y después de la colisión. La fórmula (V.61) es válida para frecuencias $\omega\tau \ll 1$, donde τ es el orden de la magnitud del tiempo de interacción, a causa de la cual la velocidad de la partícula varió bruscamente. Si la variación de la velocidad es instantánea, el dominio de aplicabilidad de la fórmula (V.61) está limitado por la condición según la cual la magnitud $\hbar\omega$ tiene que ser pequeña en comparación con la energía cinética de la partícula, para excluir los efectos cuánticos en la radiación.

Las fórmulas (V.60) y (V.61) permiten hacer generalizaciones para el caso de un sistema de cargas e_m ($m = 1, 2, \ldots$

..., N) que se mueven por trayectorias prefijadas

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \sum_{m=1}^{N} e_m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_m(t)) e^{i\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_m(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega d\omega, \tag{V.62}$$

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[\sum_{m=1}^{N} e_m \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{1m}}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_{1m}}{c}} - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{2m}}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_{2m}}{c}} \right) \right]^2 d\Omega d\omega, \tag{V.63}$$

siendo $\mathbf{r}_m(t)$ el radio vector de la carga e_m, $\mathbf{v}_{1m}$ y $\mathbf{v}_{2m}$ sus velocidades antes y después de la colisión. Las partes derechas de las igualdades (V.62) y (V.63) tienen en cuenta la interferencia de las ondas electromagnéticas radiadas por las cargas aisladas.

En el caso de movimiento periódico de una carga e, el valor medio de la intensidad dI_n de radiación en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega_0$, es, en el n-ésimo armónico con frecuencia $\omega_n = n\omega_0$, igual a

$$dI_n = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c^3} \left| 1/T \int_{-T/2}^{T/2} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_e(t)) e^{in\omega_0\left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega. \tag{V.64}$$

La potencia total de radiación en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$, en el promedio de tiempo $T = 2\pi/\omega_0$, representa de por sí una suma infinita de intensidades de radiación (V.64) en armónicos aislados con subíndices $n = 1, 2, \ldots$

Para un sistema de cargas que se mueven con un mismo período, la generalización de la fórmula (V.64) se realiza análogamente a las correlaciones (V.60) ... (V.63). Si los períodos de movimiento de las partículas aisladas difieren entre sí, el valor medio de la intensidad de radiación respecto al tiempo tiene formas más complicadas.

La acción inversa de la radiación sobre una partícula cargada, que avanza en el campo electromagnético exterior **E** y **H** con una velocidad **v**, se toma en consideración en la ecuación del movimiento, agregando a la fuerza de Lorentz la fuerza específica **f** de rozamiento por radiación, la cual está orientada en dirección contraria a la velocidad **v**. Eligiendo esta última en calidad de eje X, obtenemos, en

el caso ultrarrelativista:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - v^2/c^2}. \qquad \text{(V.65)}$$

Si las velocidades de la partícula son cercanas a la de la luz, pueden presentarse las condiciones cuando la fuerza de rozamiento por radiación (V.65) resulta ser la principal fuerza efectiva. Entonces, después de cruzar el campo electromagnético exterior, la energía de la partícula cargada no puede superar el valor límite de $\mathcal{E}_{\text{lím}}$, que se obtiene de la igualdad

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{lím}}} = \frac{2e^4}{3m^4c^8}\int_{-\infty}^{\infty}[(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\,dx. \qquad \text{(V.66)}$$

§ 1. Transformación del campo electromagnético

431. En un sistema de referencia en reposo se dan las intensidades **E** y **H** de un campo electromagnético homogéneo, además $\mathbf{EH} > 0$. Determinar las velocidades **V** de aquellos sistemas de coordenadas inerciales en los cuales los vectores de los campos eléctrico y magnético resultan paralelos.

432. En un sistema de referencia en reposo las intensidades de los campos eléctrico **E** y magnético **H** son recíprocamente ortogonales y se diferencian en módulo. Hallar las velocidades **V** de aquellos sistemas inerciales de coordenadas en los cuales existe: a) solamente campo eléctrico; b) solamente campo magnético. Determinar las intensidades de dichos campos.

433. Se dan las intensidades **E** y **H** de un campo electromagnético homogéneo en cierto sistema inercial de coordenadas, al mismo tiempo que $\mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq 0$. Hallar las velocidades **V** de todos los sistemas inerciales de coordenadas en los cuales el módulo de la intensidad del campo eléctrico (o magnético) tiene el mismo valor número que en el sistema de referencia inicial. Representar el resultado en forma vectorial.

434. Una corriente continua con densidad espacial j fluye a lo largo de un cilindro infinito homogéneo de radio arbitrario. Las densidades espacial y superficial de la

carga del cilindro son nulas. Hallar las velocidades V de los sistemas inerciales de coordenadas en cada punto del espacio donde la intensidad del campo eléctrico es en módulo N veces menor que la intensidad del campo magnético.

435. Aplicando las fórmulas de transformación de las intensidades de los campos eléctrico y magnético (V.28) y (V.29) demostrar que las magnitudes $E^2 - H^2$ y $\mathbf{EH}$ no cambian de forma y valor numérico al pasar de un sistema de referencia inercial a otro.

436. Las intensidades **E** y **H** de los campos eléctrico y magnético forman en el sistema de coordenadas inicial un ángulo agudo. Determinar los módulos E' y H' de las intensidades de los campos eléctrico y magnético en aquel sistema de referencia inercial en el cual el ángulo entre los vectores $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{H}'$ es igual a $\pi/4$.

437. Un neutrón con momento magnético μ se mueve con velocidad **v** en el campo coulombiano del núcleo en reposo cuya carga es Q. Considerando la velocidad del neutrón pequeña en comparación con la velocidad de la luz y despreciando los miembros de orden $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, hallar la fuerza **F** aplicada al neutrón en cada punto de la trayectoria.

438. Una partícula eléctricamente neutra con un momento dipolar eléctrico interior **d** se mueve con una velocidad **v** en un campo magnético no homogéneo de intensidad **H**. Omitiendo los sumandos proporcionales al parámetro pequeño $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, determinar la fuerza **F** aplicada a la partícula.

439. Los ejes cartesianos homónimos de dos sistemas de coordenadas inerciales son paralelos, además su movimiento relativo tiene lugar a lo largo del eje X. En el momento de tiempo $t = 0$ los orígenes de los sistemas cartesianos coincidían (véase fig. 8). Demostrar que la componente F_{14} del tensor del campo electromagnético es invariante respecto a las transformaciones de Lorentz ($F_{14} = F'_{14}$), mientras que las magnitudes F_{2k} y F_{3k} se transforman como vectores de cuatro dimensiones.

440. Demostrar que pasando a designaciones tridimensionales las ecuaciones covariantes

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j_k, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0$$

se reducen a las ecuaciones corrientes de Maxwell para las intensidades **E** y **H** del campo electromagnético.

441. Aplicando la ley de transformación de un 4-vector de onda, determinar la variación de la frecuencia (efecto de Doppler) y dirección de la velocidad de la luz (aberración de la luz) al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. Investigar las fórmulas obtenidas en el caso extremo $V \ll c$, donde V es el módulo de la velocidad del movimiento relativo de los dos sistemas mencionados.

442. Una onda electromagnética plana monocromática con frecuencia ω_1 incide formando un ángulo θ_1 con un espejo plano que se mueve con velocidad **V** en dirección de su normal al encuentro de la onda incidente. Determinar el ángulo θ_2 de reflexión respecto al espejo en movimiento y la frecuencia ω_2 de la onda reflejada.

443. Una onda electromagnética plana monocromática con densidad de energía w_0 incide perpendicularmente sobre un espejo plano en movimiento reflejándose completamente de éste. Determinar la intensidad de energía w e impulso g de la onda reflejada, si el espejo avanza con una velocidad **V** al encuentro de la onda incidente.

444. Un sistema de coordenadas inercial K' se mueve con una velocidad **V** respecto a otro sistema de coordenadas en reposo K, como se muestra en la fig. 8. Aplicando la ley de transformación del tensor energía-impulso, expresar la densidad de energía w' de una onda electromagnética plana en el sistema K' mediante la densidad de energía w de esta onda en el sistema en reposo K, donde ésta se propaga formando un ángulo α con la dirección de la velocidad **V**.

445. Un elipsoide de revolución con semiejes a y b que posee una superficie absorbente ideal se mueve con una velocidad **V** al encuentro de una onda electromagnética incidente, en la cual la intensidad del campo eléctrico es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$. El eje de simetría del elipsoide, coincidente con el semieje b, es paralelo al vector **V**. En el sistema de coordenadas vinculado con el elipsoide, determinar el valor medio de la fuerza **F** aplicada a éste respecto al tiempo de un período de oscilación. En el sistema de coordenadas indicado la longitud de la onda electromagnética incidente es pequeña en comparación con la dimensión transversal del elipsoide, así que detrás de éste existe una región de sombra ostensiblemente contorneada.

§ 2. Radiación emitida por una carga en movimiento rápido

446. Una carga e realiza un movimiento finito con una velocidad no relativista $\mathbf{v}$. Desarrollando el potencial vectorial de Liénard—Wiechert en serie respecto del parámetro v/c y del tiempo de retardo de la señal electromagnética dentro de los límites de la región de movimiento de la partícula, determinar la magnitud de este potencial y la intensidad del campo magnético en la zona de onda, tomando en consideración los sumandos que en orden de magnitud son menores v^2/c^2 veces que el principal miembro del desarrollo.

447. Determinar, empleando los potenciales de Liénard—Wiechert, las intensidades de los campos eléctrico y magnético de una partícula arbitraria en movimiento.

448. Utilizando la fórmula general (V. 47) para la distribución angular de la intensidad de radiación de una partícula relativista, determinar la intensidad dI de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ en dos casos: a) la velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ de la partícula son paralelas; b) la velocidad y aceleración son recíprocamente perpendiculares.

449. La velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ de la carga e son paralelas. Determinar la intensidad I de radiación total en todas las direcciones. Investigar la fórmula obtenida en el caso ultrarrelativista, así como siendo pequeñas las velocidades de la carga $v^2 \ll c^2$.

450. Una partícula con masa m y carga e se mueve paralelamente a la intensidad $\mathbf{E}$ de un campo eléctrico homogéneo constante. Demostrar que la velocidad de pérdida de energía $\left(-\frac{d\mathcal{E}_c}{dt'}\right)_{rad}$ de la partícula para la radiación en el momento retardado de tiempo t', calculada mediante las fórmulas (V.48) y (V.51), así como aplicando la fórmula (V.58), tiene un mismo valor. Aquí $\mathcal{E}_c$ es la energía de la partícula en el campo eléctrico exterior.

451. Un electrón con masa m y carga e irrumpe con una velocidad, en orden de magnitud equivalente a la velocidad de la luz, en un campo eléctrico constante homogéneo de intensidad $\mathbf{E}$. En el instante de entrada $t_0 = 0$ en el campo eléctrico exterior la velocidad del electrón es perpendicular al vector $\mathbf{E}$ y su energía es igual a $\mathcal{E}_0$. Determinar la energía radiada $\mathcal{E}_{rad}$ al cabo de tiempo t después

de entrar, considerándola pequeña en comparación con la energía cinética del electrón.

452. Un electrón rápido con masa m y carga e irrumpe con una velocidad $\mathbf{v}_0$ en un semiespacio en el cual la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico es constante, uniforme y paralela al vector $\mathbf{v}_0$. Despreciando la influencia inversa de la radiación sobre el movimiento del electrón, determinar la energía $\mathscr{E}_{rad}$ perdida por éste en el tiempo de permanencia en el campo exterior.

453. La distancia l y diferencia de potenciales φ entre las placas de un condensador plano se mantienen constantes. Un protón con masa m y carga e pasa en dirección del vector de intensidad del campo eléctrico perpendicularmente a las placas. Su velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ es en valor absoluto comparable con la velocidad de la luz. Hallar la energía $\mathscr{E}_{rad}$, radiada por el protón en el transcurso de vuelo a través del condensador.

454. Una partícula relativista con masa m y carga e irrumpe en un semiespacio en el cual la intensidad del campo magnético $\mathbf{H}$ es homogénea, constante y paralela al plano de separación. La velocidad inicial de la partícula $\mathbf{v}_0$ es perpendicular al vector $\mathbf{H}$ y forma con el plano de separación un ángulo $\pi/4$. Determinar la energía $\mathscr{E}_{rad}$ radiada durante el tiempo de su paso por el campo magnético. Examinar dos casos: a) la fuerza de Lorentz en el instante inicial de tiempo está dirigida hacia el semiespacio ocupado por el campo magnético; b) la fuerza de Lorentz está orientada en dirección del semiespacio libre.

455. Un electrón con masa m y carga e se mueve perpendicularmente a un campo magnético constante homogéneo de intensidad $\mathbf{H}$. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ la energía del electrón es $\mathscr{E}_0$, además su velocidad v_0, en orden de magnitud, es igual a la velocidad de la luz. Hallar la ley según la cual decrece la energía $\mathscr{E}$ del electrón, condicionada por la radiación. En la fórmula obtenida efectuar una transición extrema para el caso de velocidad inicial pequeña del electrón $v_0^2 \ll c^2$.

456. En cierto instante de tiempo una partícula con masa m y carga positiva e avanza con velocidad $\mathbf{v}$ paralelamente a una corriente continua rectilínea de intensidad J, distando r de ésta. El momento eléctrico interno dipolar $\mathbf{d}$ de la partícula es perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}$ y se encuentra en el mismo plano por el cual pasa la trayectoria

y fluye la corriente. Despreciando los sumandos pequeños, proporcionales a $v^2/c^2 \ll 1$, hallar la intensidad I de radiación en el instante de tiempo indicado.

457. Un electrón con masa m y carga e pasa a una gran distancia l de un núcleo fijo que posee una carga $Z\,|\,e\,|$. Menospreciando la curvatura de la trayectoria y considerando la variación de la velocidad del electrón muy pequeña en comparación con su valor inicial $\mathbf{v}_0$, determinar la energía $\mathscr{E}_{\text{rad}}$ radiada durante el paso. Demostrar que en el caso extremo $v_0^2 \ll c^2$ el resultado obtenido coincide con el resultado del problema 294.

458. Una partícula relativista con masa m y carga e pasa a gran distancia l de un dipolo eléctrico en reposo con momento $\mathbf{d}$. Durante el movimiento la velocidad de la partícula varía despreciablemente poco, en comparación con su valor inicial $\mathbf{v}_0$. Menospreciando la curvatura de la trayectoria, hallar la energía $\mathscr{E}_{\text{rad}}$ radiada durante el tiempo de paso en dos casos: a) el momento dipolar $\mathbf{d}$ es perpendicular al plano de movimiento; b) el momento dipolar $\mathbf{d}$ es paralelo a la velocidad de la partícula.

459. Admitiendo que en el problema anterior el momento eléctrico dipolar $\mathbf{d}$ es perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}_0$ de la partícula relativista y que se encuentra en el plano de movimiento, calcular la proyección del impulso emitido sobre la dirección del vector $\mathbf{v}_0$.

460. A gran distancia l de un neutrón fijo que posee un momento magnético μ pasa un electrón con masa m y carga e. La velocidad $\mathbf{v}_0$ de éste a una distancia infinitamente grande del neutrón es, en orden de magnitud, igual a la velocidad de la luz. Considerando aproximadamente que la trayectoria del electrón es rectilínea, así como que la variación de la velocidad durante el movimiento es muy pequeña, determinar la energía total $\mathscr{E}_{\text{rad}}$ radiada en dos casos: a) el momento magnético μ es perpendicular al plano de movimiento; b) el momento magnético μ es paralelo a la velocidad del electrón.

461. Admitiendo que en el problema anterior el momento magnético μ del neutrón es perpendicular a la velocidad del electrón $\mathbf{v}_0$ y se encuentra en el plano de movimiento, calcular la proyección del impulso emitido sobre la dirección del vector $\mathbf{v}_0$.

462. Por una recta infinita fluye una corriente continua lineal J. A una distancia l de la corriente y perpendicular-

mente a ésta pasa una partícula relativista con masa m y carga e. Considerando aproximadamente que la trayectoria es rectilínea, así como que la velocidad de la partícula v no varía, determinar la energía total $\mathscr{E}_{rad}$ radiada en el transcurso del paso.

463. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ una partícula ultrarrelativista con masa m, carga e y energía $\mathscr{E}_0$ irrumpe en un campo eléctrico constante y homogéneo, formando un ángulo recto con el vector **E**. Menospreciando la curvatura de la trayectoria, determinar la ley según la cual decrece la energía $\mathscr{E}$ de la partícula en el intervalo de tiempo durante el cual la velocidad de la última es todavía cercana a la de la luz.

464. Una partícula ultrarrelativista con masa m y carga e se mueve formando cierto ángulo con el vector **H** de un campo magnético constante homogéneo. En el instante inicial de tiempo $t_0 = 0$ su energía era $\mathscr{E}_0$. Determinar la ley según la cual disminuye la energía $\mathscr{E}$ de la partícula en el intervalo de tiempo, durante el cual la velocidad de ésta es cercana a la de la luz.

465. Una partícula con masa m y carga e se mueve en un campo de fuerza **F** arbitrario. Representar la velocidad con que pierde energía la partícula para radiación (V. 58) como función de su velocidad v y aceleración $\dot{\mathbf{v}}$.

466. Como resultado del efecto Compton, un electrón en reposo adquiere una velocidad v, cercana en valor absoluto a la velocidad de la luz. La carga del electrón es e. Determinar la energía $d\mathscr{E}_\omega$ radiada por este último en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$.

467. Valiéndose de la fórmula general (V.60) para la energía $d\mathscr{E}_{n\omega}$ radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias que abarca ω y $\omega + d\omega$, y considerando que en ésta la velocidad v de la carga e es pequeña respecto a la velocidad de la luz, determinar la descomposición espectral de la energía total de radiación $d\mathscr{E}_\omega$ teniendo en consideración los miembros pequeños de orden v^2/c^2. Basándose en el resultado obtenido hallar la intensidad I de radiación, definida por la fórmula (IV.16).

468. Una carga e realiza, mediante cierto dispositivo, oscilaciones armónicas rápidas $z = a \cos \omega_0 t$ a lo largo del eje Z. Determinar, en el n-ésimo armónico con frecuencia $\omega_n = n\omega_0$, el valor medio de la intensidad dI_n de radiación

en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ respecto a un período $T = 2\pi/\omega_0$.

469. Una carga e gira por una circunferencia de radio R con una velocidad constante en módulo $v = R\omega_0$. Determinar, en el n-ésimo armónico con frecuencia $\omega_n = n\omega_0$, el valor medio de la intensidad dI_n de radiación en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ respecto a un período $T = 2\pi/\omega_0$.

470. Unas cargas e_1 y e_2 realizan oscilaciones armónicas $z_1 = a_1 \cos\omega_0 t$ y $z_2 = a_2 \cos\omega_0 t$ a lo largo de dos rectas infinitamente cercanas y paralelas al eje Z. Determinar, respecto a un período $T = 2\pi/\omega_0$, el valor medio de la intensidad dI_n de radicación en el elemento del ángulo sólido $d\Omega$ en el n-ésimo armónico con frecuencia $\omega_n = n\omega_0$.

471. Determinar la energía límite $\mathcal{E}_{\text{lím}}$ que puede poseer un electrón con masa m y carga e después de atravesar con un parámetro de impacto l el campo coulombiano Q/r de un núcleo en reposo.

472. Determinar la energía límite $\mathcal{E}_{\text{lím}}$ de un protón ultrarrelativista con masa m y carga e después de atravesar con un parámetro de impacto l el campo magnético terrestre, que se caracteriza por el momento magnético μ. Este último es perpendicular al plano de movimiento del protón.

473. Una partícula con masa m y carga e ha pasado con un parámetro de impacto l cerca de un dipolo eléctrico en reposo con momento $\mathbf{d}$. El vector $\mathbf{d}$ es paraleo a la velocidad de la partícula. Determinar la energía límite $\mathcal{E}_{\text{lím}}$ que puede poseer la partícula después de haber pasado.

474. A una distancia l de un hilo infinito rectilíneo, cargado uniformemente con una densidad lineal constante q, pasa una partícula ultrarrelativista con masa m y carga e. Su velocidad es perpendicular al hilo. Determinar la energía límite $\mathcal{E}_{\text{lím}}$ que puede poseer la partícula después de haber pasado cerca del hilo cargado.

475. Una partícula relativista con masa m y carga e pasa a una distancia l del eje de un cilindro infinito por el cual fluye una corriente continua J. El radio del cilindro es menor que l. Determinar la energía límite $\mathcal{E}_{\text{lím}}$ que puede poseer la particula después de haber pasado a través del campo magnético originado por dicha corriente.

SOLUCIONES Y RESPUESTAS

Capítulo I CAMPO ELÉCTRICO CONSTANTE

§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en electrostática

1. a) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$; b) $(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} - 2(\mathbf{ak})\,\mathbf{r} + (\mathbf{kr})\,\mathbf{a}$; c) $(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} \operatorname{sen} \mathbf{kr} - \mathbf{a} \cos \mathbf{kr}$ d) $\dfrac{3(\mathbf{dr})\,\mathbf{r}}{r^5} - \dfrac{\mathbf{d}}{r^3}$;

e) $-\left[\dfrac{df(r)}{dr} F(r) + f(r) \dfrac{dF(r)}{dr}\right] \dfrac{\mathbf{r}}{r}$; f) $-\dfrac{dF}{df} \dfrac{df}{d(\mathbf{ar})} \mathbf{a}$.

2. No, ya que el rotacional de la función vectorial dada difiere de cero: rot $\mathbf{E} = 2\mathbf{a}$.

3. La intensidad del campo electrostático en el interior de una región vacía tiene que satisfacer las ecuaciones homogéneas de Maxwell rot $\mathbf{E} = 0$ y div $\mathbf{E} = 0$. Por esto, para responder a la pregunta planteada es menester calcular el rotacional y la divergencia del campo dado:

a) sí, puesto que rot $\mathbf{E} = 0$ y div $\mathbf{E} = 0$;
b) no, porque rot $\mathbf{E} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ y div $\mathbf{E} = \mathbf{ab}$;
c) es posible si $\mathbf{ab} = 0$ (rot $\mathbf{E} = 0$, div $\mathbf{E} = 3\,\mathbf{ab}$);
d) no, ya que rot $\mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y div $\mathbf{E} = -2\mathbf{ab}$;
e) no, puesto que rot $\mathbf{E} = 3(\mathbf{ar})\,\mathbf{k} - (\mathbf{ak})\,\mathbf{r}$ y div $\mathbf{E} = \mathbf{a}(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$;
f) no, porque rot $\mathbf{E} = 3(\mathbf{r} \times \mathbf{c})$ y div $\mathbf{E} = -2(\mathbf{cr})$;
g) no, ya que rot $\mathbf{E} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cos \mathbf{kr} - (\mathbf{br})(\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \operatorname{sen} \mathbf{kr}$ y div $\mathbf{E} = \mathbf{ab} \cos \mathbf{kr} - (\mathbf{ak})(\mathbf{br}) \operatorname{sen} \mathbf{kr}$;
h) sí, puesto que rot $\mathbf{E} = 0$ y div $\mathbf{E} = 0$;
(i) sí, ya que rot $\mathbf{E} = 0$ y div $\mathbf{E} = 0$.

4. a) $\dfrac{b^2}{4\pi}$; b) $\dfrac{gr}{\pi}$; c) $\dfrac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$; d) $\rho_0 \cos 0$ para $r < R$ y 0 para $r > R$; e) $\rho_0 \cos \psi$ para $r < R$ y 0 para $r > R$.

6. No.

7. *Indicación.* Aplicar el teorema de Stokes (S. 1.17) y la ecuación de electrostática (1.1).

8. La carga con densidad superficial σ ocupa las siguientes superficies: a) el plano cartesiano XY con $\sigma = E_0/2\pi$; b) una esfera de radio R con $\sigma = Q/4\pi R^2$;
c) una superficie cilíndrica de radio R con $\sigma = q/4\pi R$.

§ 2. Teorema electrostático de Gauss

9. a) La intensidad del campo eléctrico E de una esfera cargada con homogeneidad está orientada por el radio, mientras que el módulo del vector E depende de la distancia r hasta el centro de la esfera. Estas deducciones emanan de la simetría esférica de ubicación de las cargas. En calidad de superficie suplementaria en el teorema electrostático de Gauss hay que elegir una esfera concéntrica, ya que la función subintegral $E = E(r)$ es constante en esta esfera y se saca fuera del signo integral:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E.$$

Para la región interior de la esfera acorde con el teorema de Gauss se obtiene

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{16\pi^2}{3} r^3 \rho, \qquad \mathbf{E}_1 = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}.$$

Fuera de la esfera

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{16\pi^2}{3} R^3 \rho, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

El potencial del campo eléctrico se halla resolviendo la ecuación

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -E(r),$$

cuya parte derecha es igual a $E_1(r)$ dentro y a $E_2(r)$ fuera de la esfera. La integración de esta ecuación nos da

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} \rho r^2 + c_1 \qquad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = -\frac{4\pi}{3} \frac{\rho R^3}{r} + c_2 \qquad \text{para } r \geqslant R.$$

Las constantes de integración c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones suplementarias $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, $\varphi_2(\infty) = 0$.

En definitiva, el potencial del campo eléctrico adquiere la siguiente forma

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho R^2}{3} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \text{para } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} \qquad \text{para } r \geqslant R;$$

b) $\mathbf{E}_1 = 2\pi\rho\mathbf{r}, \qquad \varphi_1 = \pi\rho(R^2 - r^2)$ para $r \leqslant R$,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2\pi\rho R^2 \mathbf{r}}{r^2}, \quad \varphi_2 = 2\pi\rho R^2 \ln \frac{R}{r} \text{ para } r \geqslant R,$$

donde el radio vector r del punto de observación está orientado a favor del radio del cilindro, mientras que la constante arbitraria en el po-

tencial está elegida a partir de la condición $\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = 0$;

c) $\mathbf{E}_1 = 4\pi\rho\, x\mathbf{1}_x$, $\varphi_1 = -2\pi\rho x^2$ para $|x| \leqslant L$,

$\mathbf{E}_2 = 4\pi\rho L \dfrac{x}{|x|}\mathbf{1}_x$, $\varphi_2 = 2\pi\rho\, L\,(L - 2|x|)$ para $|x| \geqslant L$.

El origen del sistema cartesiano de coordenadas se encuentra sobre el plano de simetría de la placa, mientras que el eje X es perpendicular a ésta. La constante arbitraria en el potencial está elegida a partir de la condición $\varphi_1(0) = 0$.

10. a) $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 4\pi R\sigma$ para $r < R$, $\mathbf{E}_2 = \dfrac{4\pi R^2\sigma\mathbf{r}}{r^3}$, $\varphi_2 = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{r}$ para $r > R$; b) $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ para $r < R$, $\mathbf{E}_2 = \dfrac{4\pi\sigma R\mathbf{r}}{r^2}$, $\varphi_2 = 4\pi\sigma R \ln\dfrac{R}{r}$ para $r > R$; c) $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \dfrac{x}{|x|}\mathbf{1}_x$, $\varphi = -2\pi\sigma|x|$, donde x es la coordenada del punto de observación, contándolo del plano cargado.

11. $\Phi = \pi^2 a R^3 (1 - 1/\sqrt{2})$.

12. $\mathbf{E} = \dfrac{e\mathbf{r}}{r^3}[1 + 2r/a\,(1 + r/a)]\, e^{-2r/a}$; $\mathbf{E} = \dfrac{e\mathbf{r}}{r^3}$ para $r \ll a$,

$$\mathbf{E} = \frac{2e\mathbf{r}}{a^2 r} e^{-2r/a} \text{ para } r \gg a.$$

13. $\mathbf{E}_1 = 0$, $\varphi_1 = 4\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r\, dr$ para $r \leqslant R_1$;

$$\mathbf{E}_2 = \frac{4\pi\mathbf{r}}{r^3} \int\limits_{R_1}^{r} \rho(\xi)\,\xi^2 d\xi,\quad \varphi_2 = 4\pi\left(\int\limits_{r}^{R_2} \rho(\xi)\,\xi d\xi + \frac{1}{r}\int\limits_{R_1}^{r} \rho(\xi)\,\xi^2\, d\xi\right) \text{ para } R_1 \leqslant r \leqslant R_2;$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{4\pi\mathbf{r}}{r^3} \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r^2\, dr,\quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{r} \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho(r)\, r^2\, dr \text{ para } r > R_2.$$

14. $\mathbf{E} = \dfrac{4\pi\mathbf{r}}{r^2} \int\limits_0^r \rho(\xi)\,\xi\, d\xi$, $\varphi = 4\pi \int\limits_r^R 1/\eta \int\limits_0^\eta \rho(\xi)\,\xi\, d\xi\, d\eta$.

15. $\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{1}_x \int\limits_0^x \rho(|\xi|)\, d\xi$, $\varphi = 4\pi \int\limits_0^x (\xi - x)\,\rho(|\xi|)\, d\xi$.

16. Examinemos el cuerpo formado por la rotación de una línea de fuerza en torno al eje X. Supongamos que esta línea de fuerza une las dos cargas. Entonces, el flujo de intensidades del campo eléctrico total a través de cualquier sección transversal del cuerpo de revolu-

ción obtenido tiene un mismo valor numérico. Este flujo puede expresarse mediante la carga e_1 o e_2, si la superficie de la sección transversal se lleva primero hacia el punto de ubicación de la carga e_1 y posteriormente al de la carga e_2. Igualando estas expresiones resulta

$$2\pi e_1 (1 - \cos\theta_1) = 2\pi |e_2| (1 - \cos\theta_2),$$

$$\theta_2 = 2 \operatorname{arc\,sen} \left(\sqrt{\frac{e_1}{|e_2|}} \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \right).$$

Todas las líneas de fuerza que entran en la carga e_2, forman un cuerpo de revolución que contacta con la superficie de un cono circular recto cuyo vértice forma un ángulo θ_0 y se encuentra en el punto de ubicación de la carga e_1. El ángulo θ_0 se determina de la correlación

$$2\pi e_1 (1 - \cos\theta_0) = 4\pi |e_2|.$$

La primera línea de fuerza que sale de la carga e_1 y se aleja por el plano XY hacia el infinito contacta con la superficie del cuerpo de revolución mencionado. Por esto,

$$\theta_0 = 2 \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{|e_2|}{e_1}}.$$

Si admitimos que $\theta_\infty \neq 0$, entonces, la línea de fuerza que se aleja por el plano XY hacia el infinito, a unas distancias considerablemente grandes de las cargas, se encuentra sobre la superficie de un cono circular recto con un ángulo θ_∞ en el vértice. Dentro del cono no habrá líneas de fuerza, ya que éste está formado al girar la primera línea de fuerza que se aleja hacia el infinito. Por otra parte, a distancias considerablemente grandes, el campo eléctrico de un sistema de dos cargas coincide con alta precisión con el campo de una carga puntual $e_1 + e_2$, el cual es esférico-simétrico. Esta contradicción obtenida nos lleva a la deducción que $\theta_\infty = 0$.

17. $\psi_1 = \dfrac{|q_2|}{q_1} \psi_2$, $\psi_0 = \dfrac{\pi |q_2|}{q_1}$.

18. $e_2 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} e_1$.

19. La distribución de la densidad espacial de la carga se halla en todas las partes mediante la ecuación de Maxwell $\rho = 1/4\pi \operatorname{div} \mathbf{E}$, excepto el punto $r = 0$, el cual es un punto especial. En él está ubicada una carga puntual, ya que la intensidad del campo eléctrico para $r \to 0$ se transforma en infinito, como $1/r^2$. La magnitud de la carga puntual puede determinarse de acuerdo con el teorema de Gauss, si la superficie esférica cerrada suplementaria se concentra en el punto $\mathbf{r} = 0$. Definitivamente se obtiene

$$\rho = e \left[\delta(\mathbf{r}) - \frac{b}{4\pi r} e^{-br} \right], \qquad Q = 0.$$

20. $\mathbf{E} = 2q \left(\dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^2} - \dfrac{\mathbf{r}}{r^2} \right)$, $\varphi = 2q \ln \dfrac{r}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|}$;

$$\mathbf{E} = 2q \left(\frac{2(\mathbf{l}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{l}}{r^2} \right), \quad \varphi = \frac{2q(\mathbf{l}\mathbf{r})}{r^2} \text{ para } r \gg l.$$

Aquí, l es el vector trazado desde el hilo negativo hacia el positivo. El origen del radio vector r se encuentra sobre el hilo negativo y además es perpendicular a éste.

21. $\mathbf{E} = 2\pi\sigma \left(\frac{x}{|x|} \mathbf{l}_x + \frac{y}{|y|} \mathbf{l}_y + \frac{z}{|z|} \mathbf{l}_z \right)$. Los ejes cartesianos coinciden con las líneas de intersección de los planos cargados.

22. Sin variar el campo eléctrico del sistema cargado dado rellenemos la cavidad con una carga positiva de densidad espacial ρ, y otra negativa de densidad $-\rho$. Como resultado obtendremos dos esferas cargadas con homogeneidad, de las cuales, la mayor es positiva y la menor negativa. Según el principio de superposición, la intensidad del campo eléctrico dentro de la esfera menor es equivalente a la suma de intensidades engendradas por separado por las esferas, positiva

$$\mathbf{E}_+ = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}$$

y negativa

$$\mathbf{E}_- = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}'.$$

Aquí, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los radio vectores trazados desde los centros de las esferas (la mayor y la menor) hasta el punto de observación. La intensidad $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ del campo eléctrico total es homogénea e igual a

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{l},$$

donde $\mathbf{l}$ es el vector trazado desde el centro de la esfera dada hacia el centro de la cavidad. Su módulo es igual a la distancia entre dichos centros. El campo eléctrico hallado existe también dentro de la cavidad hasta que ésta se rellena con las cargas positiva y negativa.

23. $\mathbf{E} = 2\pi\rho\mathbf{l}$, donde $\mathbf{l}$ es el vector trazado desde el eje del cilindro hacia el eje de la cavidad.

24. $\mathbf{E} = 2\pi\sigma\mathbf{n} - 2a\sigma \frac{\mathbf{r}}{r^2}$, siendo $\mathbf{n}$ la normal del plano cargado orientada en dirección del punto de observación, r la distancia entre el punto de observación y el eje de la rendija, $\mathbf{r}$ el radio vector perpendicular a este eje.

§ 3. Aplicación de la solución general de la ecuación de Poisson.

25. $\varphi = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right)$, $E_x = E_y = 0$,

$$E_z = 2\pi\sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right);$$

$$\varphi = \frac{\pi R^2 \sigma}{|z|}, \quad E_z = \frac{\pi R^2 \sigma z}{|z|^3} \text{ para } |z| \gg R.$$

La coordenada z se cuenta a partir del plano del disco.

26. $\mathbf{E} = 2\pi z \left(\frac{2\rho}{3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \mathbf{l}_z$ para $|z| \leqslant R$;

$\mathbf{E} = 2\pi z \left(\frac{2R^3\rho}{3|z|^3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \mathbf{l}_z$ para $|z| \geqslant R$.

La coordenada z se cuenta a partir del centro de la esfera.

27. $\varphi = q \ln \left| \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2+z^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2+z^2}} \right|$.

28. $\varphi = \pi\rho \left[(z+h)\sqrt{(z+h)^2+R^2} - (z-h) \times \right.$

$\left. \times \sqrt{(z-h)^2+R^2} - 2(z^2+h^2) + R^2 \ln \left| \frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}} \right| \right]$

para $|z| \leqslant h$;

$\varphi = \pi\rho \left[(z+h)\sqrt{(z+h)^2+R^2} - (z-h)\sqrt{(z-h)^2+R^2} - \right.$

$\left. - 4h|z| + R^2 \ln \left| \frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}} \right| \right]$ para $|z| \geqslant h$.

El origen de las coordenadas se encuentra en el centro del cilindro. Después de la transición extrema $R \to 0$ y $\pi R^2\rho \to q$ el potencial exterior adquiere la siguiente forma

$$\varphi = q \ln \frac{|z|+h}{|z|-h},$$

lo que coincide con el potencial del campo eléctrico del segmento ubicado sobre el eje Z entre los puntos $z_1 = -h$ y $z_2 = h$ y cargado uniformemente con una densidad lineal q.

29. a) $\varphi = \frac{2\pi Rq}{\sqrt{z^2+R^2}}$, donde z es la distancia hasta el plano del anillo;

b) $\varphi = 2\pi R\sigma \ln \left| \frac{z+h+\sqrt{(z+h)^2+R^2}}{z-h+\sqrt{(z-h)^2+R^2}} \right|$, donde el origen de las coordenadas se encuentra en el centro de la superficie cilíndrica;

c) $\varphi = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2+R_2^2} - \sqrt{z^2+R_1^2} \right)$, donde z es la distancia hasta el plano donde se encuentran las cargas;

d) $\varphi = \frac{2\pi\sigma R}{z} \left(\sqrt{z^2+R^2} - |z-R| \right)$, donde la coordenada z se

cuenta a partir del centro de curvatura del hemisferio;

$$\text{c) } \varphi = \frac{2\pi\rho}{3z}\left[(z^2+R^2)^{3/2} - 2z^3 + \frac{3R^2z}{2} - R^3\right] \text{ para } 0 \leqslant z \leqslant R,$$

$$\varphi = \frac{2\pi\rho}{3z}\left[(r^2+R^2)^{3/2} - z^3 - \frac{3R^2z}{2} + R^3\right] \text{ para } z \geqslant R,$$

$$\varphi = \frac{2\pi\rho}{3z}\left[(z^2+R^2)^{3/2} + z^3 + \frac{3R^2r}{2} - R^3\right] \text{ para } z \leqslant 0,$$

donde la coordenada z se cuenta a partir del centro de la esfera truncada.

30. $\varphi = 2\pi\sigma\left[\frac{R}{z}\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z-R|\right) - \sqrt{z^2+R^2}\right]$;

$$\varphi = \pi\sigma z \qquad \text{para } |z| \ll R,$$

$$\varphi = -2\pi\sigma|z| \text{ para } |z| \gg R.$$

31. $\mathbf{E} = \frac{\pi\rho_0}{a}(1 - e^{aR})\,\mathbf{l}_z$. El versor $\mathbf{l}_z$ está orientado a lo largo del eje de simetría en dirección de la convexidad de la semiesfera.

32. Fijemos el origen de las coordenadas en el centro de la esfera. Si el punto de observación con coordenadas esféricas r y θ se encuentra dentro de la esfera, la región de integración respecto a la variable r' en la integral (I.11) la dividimos en dos dominios: $0 \leqslant r' \leqslant r$ y $r \leqslant r' \leqslant R$. Para el primero apliquemos el desarrollo de (S5.11), y para el segundo el de (S5.12). Al determinar el potencial fuera de la esfera se utiliza el desarrollo (S5.12). Como resultado se obtiene

$$\varphi_1(r, \theta) = \pi\rho_0 r\left(\frac{4}{3}R - r\right)\cos\theta \text{ para } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^2}\cos\theta \text{ para } r \geqslant R.$$

33. Los ejes X e Y del sistema cartesiano de coordenadas se eligen en el plano del anillo, situando el origen de las mismas en su centro. El potencial en un punto de observación arbitrario con radio vector $\mathbf{r}$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint \frac{q\,dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{1}$$

donde la integral se calcula a lo largo de una circunferencia de radio R, que se encuentra sobre el plano XY y cuyo centro está en el origen de las coordenadas. Para la región donde $r > R$ nos valemos del desarrollo (S5.11). Entonces, el potencial (1) en un punto de observación arbitrario con coordenadas esféricas r, θ y ψ, puede representarse en forma de una suma doble

$$\varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi q Y_{lm}^*(\theta, \psi)}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\int_0^{2\pi} Y_{lm}\left(\frac{\pi}{2}, \psi'\right)d\psi'.$$

Si se tiene en cuenta las fórmulas (S5.9) y (S5.8), entonces, la última expresión se simplifica

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(0)\, P_l(\cos\theta).$$

El valor del polinomio de Logendre para el punto cero se da acorde con las fórmulas (S4.6) y (S4.7), así que, para la región $r > R$, se obtiene definitivamente

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} P_{2k}(\cos\theta).$$

Análogamente para $r < R$ se obtiene

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} P_{2k}(\cos\theta).$$

El potencial hallado no depende del ángulo azimutal ψ, o sea, es acial-simétrico. En puntos del eje del anillo ($r = |z|$, $\theta = 0$) éste se representa en forma de series:

$$\varphi = \frac{2\pi R q}{|z|}\left[1 + \frac{R^2}{z^2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{R^2}{z^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \ldots\right]$$

para $|z| > R$,

$$\varphi = 2\pi q\left[1 + \frac{z^2}{R^2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{R^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \ldots\right]$$

para $|z| < R$,

as cuales son de por sí el desarrollo de las siguientes funciones:

$$\varphi = \frac{2\pi R q}{|z|} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \text{ para } |z| > R,$$

$$\varphi = \frac{2\pi q}{\sqrt{1 + z^2/R^2}} \text{ para } |z| < R.$$

Las últimas expresiones coinciden con el potencial en el eje del anillo, obtenido en el problema 29a).

34. $\varphi = \frac{Q}{R} + \frac{Q}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta)$ para $r \leqslant R$,

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta) \text{ para } r \geqslant R.$$

35. $$\varphi = \frac{Q}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\cos\theta),$$

$$E_r = \frac{Q}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)(2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\cos\theta),$$

$$E_\theta = \frac{Q}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k-1} (k-1)! (k+1)!} \times$$

$$\times \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} \frac{P_{2k-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_{2k}(\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$E_\Phi = 0.$$

36. La región de integración en la integral (I.11) se divide en dos dominios: $0 \leqslant r' \leqslant r$ y $r \leqslant r' \leqslant R$. En el primero es válido el desarrollo (S5.11) y en el segundo (S5.12). Definitivamente

$$\varphi = \pi\rho R^2 \left\{1 - \frac{r^2}{3R^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (2k-1)\, k! (k+1)!} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{4k+3}{2(k+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\right] P_{2k+1}(\cos\theta)\right\}.$$

§ 4. Fuerza y energía en electrostática

37. $$F = \frac{Q^2}{8R^2}$$

38. Coloquemos el origen del sistema cartesiano de coordenadas en el centro de la esfera. La fuerza aplicada al hemisferio superior se expresa a través del tensor maxweliano de tensión $T_{\alpha\beta}$ de la siguiente manera

$$F_z = \int_{S_0} T_{3\beta} n_\beta \, dS + \int_{S_1} T_{3\beta} n_\beta \, dS,$$

donde S_0 y S_1 son la base y superficie del hemisferio. Las otras componentes de la fuerza son iguales a cero $F_x = F_y = 0$. Cuando se integra respecto de la base hay que tener en cuenta que los vectores $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3}\rho\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son recíprocamente ortogonales:

$$\int_{S_0} T_{3\beta} n_\beta \, dS = \frac{1}{8\pi} \int_{S_0} E^2 \, dS = \frac{Q^2}{16R^2}.$$

Entre tanto, los vectores $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$ y $\mathbf{n}$, en la superficie del hemisferio,

son paralelos, por lo tanto

$$\int\limits_{S_1} T_{3\beta} n_\beta \, dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \int\limits_{S_1} n_3 \, dS = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

Como resultado

$$F_z = \frac{3Q^2}{16R^2}.$$

Otra forma de cálculo:

$$F_z = \rho \int E_z \, dV = \frac{4\pi}{3} \rho^2 \int r n_3 \, dV = \frac{3Q^2}{16R^2},$$

donde la integral se calcula respecto al hemisferio superior.

39. El valor absoluto de la fuerza que se busca tiene la forma

$$F = \frac{4\pi}{3} \rho^2 R^3.$$

40. $W = \dfrac{3Q^2}{5R}$.

41. $W = \dfrac{Q^2}{2R}$, $Q = 4\pi R^2 \sigma$.

42. Si eliminamos la esfera menor, entonces dentro de la mayor aparecerá una cavidad cuyo campo eléctrico será homogéneo:

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{l},$$

donde el vector $\mathbf{l}$ está orientado del centro de la esfera mayor al centro de la cavidad (véase el problema 22). Por esto, la fuerza de repulsión mutua de las esferas será:

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho Q \mathbf{l}.$$

Para hallar el potencial del campo eléctrico dentro de la cavidad señalada, utilicemos el método expuesto en la solución del problema 22. Entonces, el potencial estará compuesto por la suma de potenciales engendrados por las esferas positiva y negativa por separado:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{3} \rho (3R_2^2 - r^2) - \frac{2\pi}{3} \rho (3R_1^2 - r'^2) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \rho [3(R_2^2 - R_1^2) + l^2 - 2\mathbf{rl}].$$

donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los radio vectores trazados desde los centros de la esfera y de la cavidad hasta un mismo punto de observación, además $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{l}$.

La energía de interacción que se busca representa de por sí la energía potencial de la carga Q en el campo exterior $\varphi(\mathbf{r})$, creado por la esfera mayor

$$U = \frac{2\pi}{3} \rho Q [3(R_2^2 - R_1^2) - l^2].$$

43. $\mathbf{F} = 2\pi^2\rho_1\rho_2 R_1^2 \mathbf{l}$, $U = \pi^2\rho_1\rho_2 R_1^2 (R_2^2 - R_1^2 - l^2)$, donde el vector $\mathbf{l}$ está orientado desde el eje exterior hacia el eje interior. Su módulo es equivalente a la distancia entre los ejes de los cilindros.

44. $\varphi = e(1/r + 1/a)\, e^{-2r/a}$; $\varphi = e/r$ para $r \ll a$, $\varphi = \frac{e}{a} e^{-2r/a}$ para $r \gg a$; $U = -\frac{e^2}{a}$, $W = \frac{5e^2}{16a}$.

45. $U = 2\pi R\sigma e\,(\sqrt{5 - 4\cos\theta_0} - 1)$.

46. $\mathbf{F} = 2\pi\rho e h \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right) \mathbf{l}_z$. El versor $\mathbf{l}_z$ está orientado a lo largo del eje del cono desde la base hacia el vértice.

47. $U = 2\pi R\sigma e$.

48. $U = \frac{3Qe}{2R}$. El valor de U no variará en caso de que la carga Q se distribuya uniformemente por todo el volumen de la esfera.

49. $U = -\frac{e^2}{9a}$.

§ 5. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias

50. En el espacio hay destacadas dos regiones $z \leqslant 0$ y $z \geqslant 0$ con potenciales $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z)$ y $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, z)$, los cuales satisfacen las ecuaciones

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \nabla^2\varphi_2 = 0$$

así como las condiciones de frontera en el plano XY:

$$\frac{\partial\varphi_1(x, y, 0)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_2(x, y, 0)}{\partial z} = 4\pi\sigma_0 \cos(ax + by),$$

$$\varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0).$$

El potencial buscado

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) \text{ para } z \leqslant 0, \\ \varphi_2(x, y, z) \text{ para } z \geqslant 0 \end{cases}$$

decrece cuando $|z| \to \infty$, ya que la carga superficial total es igual a cero. Puesto que en el plano XY la condición de frontera es periódica y la función $\cos(ax + by)$ se reproduce cuando influye el operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, los potenciales hay que buscarlos en la forma

$$\varphi_1 = f_1(z)\cos(ax + by), \quad \varphi_2 = f_2(z)\cos(ax + by).$$

Introduciendo estas funciones en la ecuación de Poisson y reduciendo el factor común, obtendremos

$$\frac{d^2f_1}{dz^2} - \lambda^2 f_1 = 0, \quad \frac{d^2f_2}{dz^2} - \lambda^2 f_2 = 0,$$

donde $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$. La solución de estas últimas ecuaciones tiene que decrecer para $|z| \to \infty$. De esta manera se determinan los poten-

ciales con precisión hasta los factores constantes:

$$\varphi_1 = a_1 e^{\lambda z} \cos(ax + by), \qquad \varphi_2 = a_2 e^{-\lambda z} \cos(ax + by).$$

Los factores constantes a_1 y a_2 se encuentran a partir de las condiciones de frontera. Definitivamente tenemos

$$\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} e^{-\lambda|z|} \cos(ax + by).$$

51. El potencial buscado es igual a la suma de los potenciales originados por cada plano cargado (principio de superposición). Por esto, es suficiente investigar el campo eléctrico solamente en uno de estos planos. Los potenciales engendrados por los otros dos planos cargados se hallan cambiando simplemente las designaciones de las coordenadas de los puntos de observación. El método para calcular el potencial del campo eléctrico de un plano cargado ya se ha expuesto en el problema anterior. Como resultado obtenemos

$$\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} [e^{-\lambda|z|} \operatorname{sen} a_1 x \operatorname{sen} b_1 y + e^{-\lambda|y|} \operatorname{sen} a_2 x \operatorname{sen} b_2 z + e^{-\lambda|x|} \operatorname{sen} a_3 y \operatorname{sen} b_3 z].$$

52. El campo eléctrico engendrado por una distribución periódica de la carga en una región ilimitada, es también periódico en todo el espacio. Además, dicho campo se anula si se admite $\rho_0 = 0$. Por esto, el potencial buscado se determina como una solución particular de la ecuación de Poisson

$$\varphi = \frac{4\pi\rho_0}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \operatorname{sen} l_3 z.$$

La intensidad del campo eléctrico se calcula según la fórmula (I.6)

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi\rho_0}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} (l_1 \cos l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \operatorname{sen} l_3 z \mathbf{l}_x + l_2 \operatorname{sen} l_1 x \cos l_2 y \operatorname{sen} l_3 z \mathbf{l}_y + l_3 \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \cos l_3 z \mathbf{l}_z).$$

53. El potencial

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 \text{ para } z \leqslant 0, \\ \varphi_2 \text{ para } z \geqslant 0 \end{cases}$$

es la solución de las ecuaciones

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos \mathbf{kr}, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0,$$

con las condiciones suplementarias

$$\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2(x, y, 0)}{\partial z}, \quad \varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0), \tag{1}$$

$$|\varphi_1(x, y, -\infty)| < \infty, \quad |\varphi_2(x, y, \infty)| < \infty. \tag{2}$$

Estas dos últimas condiciones se deducen de que están ausentes las cargas puntuales y lineales, mientras que la carga total es nula. En vista de que

$$\cos \mathbf{kr} = \cos(k_1 x + k_2 y) \cos k_3 z - \operatorname{sen}(k_1 x + k_2 y) \operatorname{sen} k_3 z,$$

el problema planteado permite separar las variables:

$$\varphi_1 = f_1(z)\cos(k_1x+k_2y)+F_1(z)\operatorname{sen}(k_1x+k_2y)+\frac{4\pi\rho_0}{k^2}\cos kr,$$

$$\varphi_2 = f_2(z)\cos(k_1x+k_2y)+F_2(z)\operatorname{sen}(k_1x+k_2y),$$

donde el último sumando del potencial φ_1 es la solución particular de la ecuación de Poisson. Las funciones $f_i(z)$ y $F_i(z)$ $(i=1,2)$ satisfacen a una misma ecuación

$$\frac{d^2f_i}{dz^2}-\lambda^2 f_i=0,$$

donde $\lambda=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$. Tomando en consideración la condición (2) obtenemos

$$f_1(z)=a_1e^{\lambda z}, \qquad F_1(z)=b_1e^{\lambda z},$$
$$f_2(z)=a_2e^{-\lambda z}, \qquad F_2(z)=b_2e^{-\lambda z}.$$

Los factores constantes se determinan de las condiciones de frontera (1), así que

$$\varphi_1=\frac{2\pi\rho_0}{k^2}\left\{2\cos kr+\left[\frac{k_3}{\lambda}\operatorname{sen}(k_1x+k_2y)-\cos(k_1x+k_2y)\right]e^{\lambda z}\right\},$$

$$\varphi_2=\frac{2\pi\rho_0}{k^2}e^{-\lambda z}\left[\cos(k_1x+k_2y)+\frac{k_3}{\lambda}\operatorname{sen}(k_1x+k_2y)\right].$$

54. Si la distribución de la carga en todo el espacio es, respecto a cualesquiera de las coordenadas cartesianas, par o impar, el potencial posee la misma paridad. En este caso dado $\varphi(x, y, -z) = -\varphi(x, y, z)$.

El problema se resuelve utilizando el método de separación de variables*)

$$\varphi(x, y, z) = f(z)\operatorname{sen} l_1x\operatorname{sen} l_2y,$$

donde $f(z)$ es una función impar que satisface las ecuaciones

$$\frac{d^2f}{dz^2}-\lambda^2 f=0 \text{ para } |z|>a,$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}-\lambda^2 f=-4\pi\rho_0\operatorname{sen} l_3z \text{ para } |z|<a,$$

siendo $\lambda=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$. Puesto que la carga total de la placa es igual a cero, la función $f(z)$ decrece cuando $|z|\to\infty$. Teniendo en cuenta lo expresado encontramos

$$f(z)=b_1e^{\lambda(z+a)} \quad \text{para} \quad z\leqslant -a,$$

$$f(z)=b_2(e^{\lambda z}-e^{-\lambda z})+\frac{4\pi\rho_0\operatorname{sen} l_3z}{l_1^2+l_2^2+l_3^2} \quad \text{para} \quad |z|\leqslant a,$$

$$f(z)=-b_1e^{-\lambda(z-a)} \quad \text{para} \quad z\geqslant a.$$

*) La exposición del método de separación de variables, en forma general, puede encontrarse en el manual [7].

Las constantes de integración se determinan de las condiciones de frontera (I.8) y (I.9). Definitivamente obtenemos

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left[\left(\operatorname{sen} l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a - \operatorname{sen} l_3 a \right] \times$$

$$\times e^{\lambda (z+a)} \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \quad (z \leqslant -a),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left[\operatorname{sen} l_3 z - e^{-\lambda a} \left(\operatorname{sen} l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) \operatorname{sh} \lambda z \right] \times$$

$$\times \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \quad (|z| \leqslant a),$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 \left[\operatorname{sen} l_3 a - \left(\operatorname{sen} l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a \right] \times$$

$$\times e^{-\lambda (z-a)} \operatorname{sen} l_1 x \operatorname{sen} l_2 y \quad (z \geqslant a),$$

donde se designa $\varphi_0 = \dfrac{4\pi\rho_0}{(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)}$.

55. Si en la distribución de las cargas existe una determinada simetría, entonces el potencial posee la misma propiedad. Como en este problema hay simetría axial, el potencial que se busca no depende del ángulo azimutal ψ.

Designemos los potenciales dentro y fuera de la esfera mediante $\varphi_1 = \varphi_1(r, 0)$ y $\varphi_2 = \varphi_2(r, \theta)$. Estos satisfacen las ecuaciones

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos\theta, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \tag{1}$$

y las condiciones de frontera en la superficie de la esfera

$$\frac{\partial \varphi_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2(R, \theta)}{\partial r}, \quad \varphi_1(R, \theta) = \varphi_2(R, \theta). \tag{2}$$

Aplicando el método de separación de variables hay que toner en cuentra que la función $\cos\theta$ se reproduce al influir la parte angular del operador laplaciano en coordenadas esféricas (S1.46):

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta \right) = -\frac{2}{r^2} \cos\theta.$$

Por esto es natural admitir que

$$\varphi_1 = F_1(r) \cos\theta, \quad \varphi_2 = F_2(r) \cos\theta.$$

Entonces el factor $\cos\theta$ podrá suprimirse de las partes derechas e izquierdas de las ecuaciones y condiciones suplementarias, después de lo cual, el problema se reducirá a uno más simple para funciones radiales $F_1(r)$ y $F_2(r)$. Conforme a las ecuaciones iniciales (1) las funciones radiales satisfacen las ecuaciones de Euler

$$r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} - 2F_1 = -4\pi\rho_0 r^2, \tag{3}$$

$$r^2 \frac{d^2 F_2}{dr^2} + 2r \frac{dF_2}{dr} - 2F_2 = 0 \tag{4}$$

y condiciones suplementarias para $r = R$, las cuales se deducen de las correlaciones (2). La solución particular de la primera ecuación es evidente $F_{1\,\text{part}} = -\pi\rho_0 r^2$, mientras que la solución general de las

ecuaciones homogéneas (3) y (4) se busca en la forma cr^s, donde c y s son constantes que deben determinarse. Sustituyendo cr^s en la ecuación (4) y reduciendo el factor común, obtenemos una ecuación cuadrada

$$s^2 + s - 2 = 0$$

con raíces $s_1 = 1$ y $s_2 = -2$. Es decir, las soluciones generales de las ecuaciones (3) y (4) tienen la forma

$$F_1 = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} - \pi\rho_0 r^2, \quad F_2 = c_3 r + \frac{c_4}{r^2}.$$

De la continuidad del potencial en el punto $r = 0$, así como de $\varphi_2(\infty, 0) = 0$, se deduce que $c_2 = c_3 = 0$. Las otras dos constantes se determinan de las condiciones de unión de las funciones radiales y sus derivadas en el punto $r = R$. Omitiendo los cálculos sucesivos, presentaremos el resultado definitivo:

$$\varphi_1 = \pi\rho_0 r\left(\frac{4}{3}R - r\right)\cos\theta, \quad E_{1r} = 2\pi\rho_0\left(r - \frac{2}{3}R\right)\cos\theta,$$

$$E_{1\theta} = \pi\rho_0\left(\frac{4}{3}R - r\right)\operatorname{sen}\theta, \quad E_{1\psi} = 0 \text{ para } r \leqslant R;$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^2}\cos\theta, \quad E_{2r} = \frac{2\pi\rho_0 R^4}{3r^3}\cos\theta,$$

$$E_{2\theta} = \frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^3}\operatorname{sen}\theta, \quad E_{2\psi} = 0 \text{ para } r \geqslant R.$$

56. $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}\rho_0(3R - 2r)\, r\cos\psi$, $E_{1r} = \frac{2\pi}{3}\rho_0(4r - 3R)\cos\psi$, $E_{1\psi} = \frac{2\pi}{3}\rho_0(3R - 2r)\operatorname{sen}\psi$, $E_{1z} = 0$ para $r \leqslant R$; $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r}\cos\psi$, $E_{2r} = \frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r^2}\cos\psi$, $E_{2\psi} = \frac{2\pi}{3}\rho_0\frac{R^3}{r^2}\operatorname{sen}\psi$, $E_{2z} = 0$ para $r \geqslant R$.

57. Para $r < R$: $\varphi_1 = \frac{4\pi}{3}\sigma r\cos\theta$, $E_{1r} = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0\cos\theta$, $E_{1\theta} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0\operatorname{sen}\theta$, $E_{1\psi} = 0$; para $r > R$: $\varphi_2 = \frac{4\pi R^3\sigma_0}{3r^2}\cos\theta$, $E_{2r} = \frac{8\pi R^3\sigma_0}{3r^3}\cos\theta$, $E_{2\theta} = \frac{4\pi R^3\sigma_0}{3r^3}\operatorname{sen}\theta$, $E_{2\psi} = 0$.

58. Para $r < R$: $\varphi_1 = 0$, $E_1 = 0$; para $r > R$: $\varphi_2 = 2\pi\sigma_0 R \times \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)\cos\psi$, $E_{2r} = 2\pi\sigma_0 R^2(1/r^2 + 1/R^2)\cos\psi$, $E_{2\psi} = 2\pi\sigma_0 R^2 \times (1/r^2 - 1/R^2)\operatorname{sen}\psi$, $E_{2z} = 0$. $E_{0r} = 2\pi\sigma\cos\psi$, $E_{0\psi} = -2\pi\sigma\operatorname{sen}\psi$, $E_{0z} = 0$, $(E_0 = 2\pi\sigma l_x)$.

59. $E_{1r}=\frac{2\pi}{15}a(9r^2-5R^2)\cos\theta$, $E_{1\theta}=\frac{2\pi}{15}a(5R^2-3r^2)\operatorname{sen}\theta$,

$E_{1\psi}=0$ para $r\leqslant R$; $E_{2r}=\frac{8\pi aR^5}{15r^3}\cos\theta$,

$$E_{2\theta}=\frac{4\pi aR^5}{15r^3}\operatorname{sen}\theta, \quad E_{2\psi}=0 \text{ para } r\geqslant R.$$

60. En el problema se dan dos regiones $r\leqslant R$ y $r\geqslant R$ con potenciales φ_1 y φ_2. La ecuación de Poisson (I.7) y condiciones suplementarias (I.8) y (I.9) permiten aplicar el método de separación de variables. Conforme a la correlación (S4.18) admitimos

$$\varphi_1 = F_1(r)\,P_n(\cos\theta),$$
$$\varphi_2 = F_2(r)\,P_n(\cos\theta).$$

Las funciones radiales satisfacen las ecuaciones no homogéneas de Euler

$$r^2\frac{d^2F_1}{dr^2}+2r\frac{dF_1}{dr}-n(n+1)F_1=-4\pi\rho_0R^2\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2},$$
$$r^2\frac{d^2F_2}{dr^2}+2r\frac{dF_2}{dr}-n(n+1)F_2=-4\pi\rho_0R^2\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}$$

y condiciones de unión

$$\frac{\partial F_1(R)}{\partial r}=\frac{\partial F_2(R)}{\partial r}, \qquad F_1(R)=F_2(R).$$

En lo sucesivo los cálculos se realizan análogamente al problema 55. Definitivamente

$$\varphi_1=2\pi\rho_0R^2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

$$\varphi_2=2\pi\rho_0R^2\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-1}P_n(\cos\theta).$$

61. $\varphi_1=\pi\rho_0R^2\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n\psi$ para $r\leqslant R$,

$$\varphi_2=\pi\rho_0R^2\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-2}\cos n\psi, \text{ para } r\geqslant R.$$

62. Los potenciales dentro $\varphi_1=\varphi_1(r,\psi)$ y fuera $\varphi_2=\varphi_2(r,\psi)$ de la superficie cilíndrica satisfacen la ecuación de Laplace y la condición de frontera (I.9)

$$\varphi_1(R,\psi)=\varphi_2(R,\psi)=\varphi_0\cos n\psi.$$

Los problemas, para el interior cuando $r\leqslant R$, y el exterior cuando $r\geqslant R$, se resuelven independientemente uno del otro empleando el método de separación de variables

$$\varphi_1=F_1(r)\cos n\psi, \qquad \varphi_2=F_2(r)\cos n\psi.$$

En tanto que para las funciones radiales $F_1(r)$ y $F_2(r)$ obtenemos las ecuaciones de Euler. Resolviendo estas últimas es aconsejable valerse

de la continuidad del potencial en el punto $r = 0$, ya que no hay cargas dentro de la superficie cilíndrica. Además, fuera de la superficie cilíndrica al aumentar r el potencial no crece, puesto que la carga superficial total es nula. Tomando en consideración la condición de frontera (I.9) hallamos

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para} \quad r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad \text{para} \quad r \geqslant R.$$

La densidad superficial de carga se determina de la condición de frontera (I.8) en la superficie cilíndrica que todavía no se ha utilizado:

$$\sigma = \frac{n\varphi_0}{2\pi R} \cos n\psi.$$

63. $$\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{r}{R}\right)^l [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)] \text{ para } r \leqslant R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \varphi)] \text{ para } r \geqslant R;$$

$$\sigma = \frac{2l+1}{4\pi R} \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y^*_{lm}(\theta, \psi)].$$

64. Aplicamos el método de separación de variables admitiendo que

$$\varphi(x, y) = X(x)\, Y(y). \tag{1}$$

El potencial a lo largo del eje Z es homogéneo. La sustitución de la función (1) en la ecuación de Laplace nos da

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{\frac{d^2Y}{dy^2}}{Y} = \lambda$$

o

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda Y = 0, \tag{3}$$

donde λ es cierta constante. Con el fin de que se cumplan las condiciones de frontera en los planos $y = 0$ e $y = b$, es imprescindible

$$Y(0) = Y(b) = 0. \tag{4}$$

La ecuación (3) y condiciones suplementarias (4) se satisfacen por las funciones

$$Y_n = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y, \tag{5}$$

donde c_n son constantes arbitrarias y $n = 0, 1, 2, \ldots$ Mientras que $\lambda = (n\pi/b)^2$.

Ya que dentro de la región examinada no hay cargas, el potencial buscado no aumenta para $x \to \infty$. Por esto, de las dos soluciones inde-

pendientes de la ecuación (2) dejamos sólo el exponente decreciente para cada valor prefijado del número n:

$$X_n = b_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \tag{6}$$

donde b_n es una constante arbitraria.

Por consiguiente, como solución particular de la ecuación de Laplace es válido el producto de las funciones (5) y (6). En el caso general, la suma infinita de productos $X_n Y_n$ satisface la ecuación de Laplace y condiciones de frontera en los planos $y = 0$ e $y = b$:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n\pi}{e}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y, \tag{7}$$

donde se ha introducido la notación $a_n = c_n b_n$.

Elijamos el coeficiente a_n de tal manera que la condición de frontera restante en el plano $x = 0$ también se cumpla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y = \varphi_0. \tag{8}$$

Para esto aprovechemos que el conjunto de expresiones (5) forma en segmento $[0, b]$ un sistema completo de funciones recíprocamente ortogonales. Multiplicando las dos partes de la igualdad (8) por $\operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y$ e integrando respecto de y, obtenemos

$$a_m = 0 \qquad \text{para} \quad m = 2k$$

$$a_m = \frac{4\varphi_0}{\pi(2k+1)} \qquad \text{para} \quad m = 2k+1$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Como resultado el potencial (7) tomará el aspecto

$$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)}{b}x} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{b} y.$$

En este problema, así como en algunos otros ulteriores la respuesta se da en forma de una serie infinita, aunque esta última a veces se suma utilizando procedimientos matemáticos determinados.

65. $$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a} y}{2k+1} \frac{}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a} b} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{b} y \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b} (a-x)}{2k+1} \frac{}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b} a} \right).$$

El potencial es homogéneo a lo largo del eje Z.

66. Ubiquemos el origen de las coordenadas en el centro del hemisferio, mientras que el eje Z lo orientamos a lo largo del eje de simetría en dirección de la convexidad. El potencial que se busca $\varphi(r, \theta)$ se desarrolla en la serie (S4.15) de polinomios de Legendre

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos\theta), \tag{1}$$

donde las funciones radiales $F_n(r)$ tienen que determinarse. Después de sustituir en la ecuación de Laplace la expresión (1) obtenemos la ecuación de Euler

$$\frac{d^2F_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}F_n = 0$$

con la solución

$$F_n = a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n + b_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},$$

donde a_n y b_n son constantes arbitrarias. A partir de la continuidad del potencial se deduce que $b_n = 0$. Por lo tanto:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

Los coeficientes a_n se eligen de tal manera que se cumplan las condiciones de frontera

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(0) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) = \varphi_0. \tag{4}$$

De la condición (3) se desprende que $a_{2k} = 0$ cuando $k = 0, 1, 2, \ldots$ así que las series (2) . . . (4) contienen solamente polinomios impares. Para hallar los factores restantes a_{2k+1}, es necesario multiplicar las dos partes de la igualdad (4) por $P_m(\cos\theta)$ sen θ, integrar respecto al ángulo θ entre los límites desde 0 hasta $\pi/2$ y aplicar las fórmulas (S4.9) y (S4.11). Entonces obtendremos

$$\varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

67. $$\varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

68. La condición de frontera para el potencial $\varphi(r, \theta)$ es más adecuado expresarla en forma de:

$$\varphi(R, \theta) = 1/2(\varphi_a + \varphi_b) + \begin{cases} 1/2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ -1/2(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } \pi/2 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

A continuación, el potencial se divide en una suma de dos sumandos $\varphi(r, \theta) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r, \theta)$ cada uno de los cuales satisface a su condición de frontera

$$\varphi_1(R) = 1/2\,(\varphi_a + \varphi_b),$$

$$\varphi_2(R, \theta) = \begin{cases} 1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ -1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } \pi/2 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

La forma de la función $\varphi_1(r)$ es evidente, mientras que el potencial $\varphi_2(r, \alpha)$ se determina lo mismo que en el problema 66:

$$\varphi = 1/2\,(\varphi_a + \varphi_b)\frac{R}{r} +$$

$$+ 1/4\,(\varphi_a - \varphi_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k} k!\,(k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos\theta).$$

69. $$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\theta) \quad (r \leqslant R),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos\theta) \quad (r \geqslant R).$$

Indicación. Resulta cómodo elegir el origen de las coordenadas en el centro de la circunferencia y orientar el eje Z en dirección del semiespacio que se investiga. En la solución de la ecuación de Laplace en forma de serie de polinomios de Legendre es necesario retener solamente aquellos sumandos que son continuos respecto a la variable r. Este requerimiento destaca dos regiones que se encuentran dentro y fuera del hemisferio de radio R, en las cuales el potencial posee una dependencia característica con relación a la variable r,

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{para} \quad r \leqslant R,$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad \text{para} \quad R \leqslant r.$$

La condición de frontera en e plano $\theta = \pi/2$ conlleva a la conclusión

$$a_0 = \varphi_0,\ b_0 = 0 \text{ y } a_{2m} = b_{2m} = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots$$
$$a_{2k+1} \neq 0 \text{ y } b_{2k+1} \neq 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Para hallar los factores restantes a_{2k+1} y b_{2k+1}, es menester valerse de la continuidad del potencial y de su derivada respecto a r en la superficie del hemisferio de radio $r = R$.

70. $$\varphi_1 = 2\pi\sigma r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos\theta) \qquad (r \leqslant R);$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\sigma R^3}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos\theta) \quad (r \geqslant R).$$

71. El eje Z del sistema cilíndrico de coordenadas se hace coincidir con el eje de la superficie cilíndrica. A todo lo largo de esta dirección el potencial es homogéneo. Los potenciales interior $\varphi_1(r, \psi)$ y exterior $\varphi_2(r, \psi)$ se calculan independientemente uno del otro. Desplacemos sus puntos de cálculo admitiendo que:

$$\varphi_1 = 1/2\,(\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_1(r, \psi),$$

$$\varphi_2 = 1/2\,(\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_2(r, \psi).$$

Estos potenciales nuevos $\tilde{\varphi}_1$ y $\tilde{\varphi}_2$ satisfacen la ecuación de Laplace y la condición de frontera

$$\tilde{\varphi}_1(R, \psi) = \tilde{\varphi}_2(R, \psi) = \begin{cases} 1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } 0 < \psi < \pi \\ -1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

A continuación utilicemos el método de separación de variables y busquemos la solución del problema planteado en la forma de

$$\tilde{\varphi}(r, \psi) = F(r)\,\Phi(\psi), \tag{1}$$

donde los subíndices 1 y 2 en el potencial están omitidos. Sustituyendo la expresión (1) en la ecuación de Laplace se obtiene

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dF}{dr}\right)}{F} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\psi^2}}{\Phi} = \lambda.$$

Aquí λ es una constante. La última correlación contiene dos ecuaciones

$$\frac{d^2\Phi}{d\psi^2} + \lambda\Phi = 0, \tag{2}$$

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2} + r\frac{dF}{dr} - \lambda F = 0, \tag{3}$$

La primera de éstas tiene solución

$$\Phi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\psi + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}\,\psi, \tag{4}$$

donde A, B y λ son constantes. Después de variar el ángulo ψ desde 0 hasta 2π el potencial (1) tiene que coincidir con la expresión inicial, por lo tanto

$$\Phi(\psi + 2\pi) = \Phi(\psi).$$

Esto se cumple bajo la condición $\sqrt{\lambda} = n$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. La solución de la segunda ecuación se busca en forma de $F = r^s$. Después de sustituir en la (3) y reducir el factor común obtenemos $s^2 = n^2$ ó $s = \pm n$. De aquí hallamos

$$F = Cr^n + \frac{D}{r^n}, \tag{5}$$

donde C y D son constantes arbitrarias. El producto de las funciones (4) y (5) es una solución particular de la ecuación de Laplace. Además, dentro de la superficie cilíndrica $D = 0$, mientras que fuera de ésta $C = 0$, ya que el potencial que se busca es una función limitada. La solución general es de por sí una suma infinita de cocientes:

$$\widetilde{\varphi}_1(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \operatorname{sen} n\psi) \quad \text{para} \quad r \leqslant R,$$

$$\widetilde{\varphi}_2(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (c_n \cos n\psi + d_n \operatorname{sen} n\psi) \quad \text{para} \quad r \geqslant R.$$

Las constantes arbitrarias a_n, b_n, c_n y d_n se determinan a partir de las condiciones de frontera. La continuidad del potencial al pasar a través de la superficie cilíndrica exige que $c_n = a_n$ y $d_n = b_n$, mientras que la imparidad de las funciones $\widetilde{\varphi}_1(R, \psi)$ y $\widetilde{\varphi}_2(R, \psi)$ respecto a la variable ψ conlleva a que $a_n = 0$. Para hallar b_n multipliquemos las dos partes de la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\psi = \begin{cases} 1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para} \quad 0 < \psi < \pi, \\ -1/2\,(\varphi_a - \varphi_b) & \text{para} \quad \pi < \psi < 2\pi \end{cases}$$

por sen $m\psi$ y aprovechemos la ortogonalidad de los senos en caso de que $m \neq n$. Entonces obtenemos

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi(2k+1)},$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Definitivamente

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \times$$

$$\times \operatorname{sen}(2k+1)\psi \quad (r \leqslant R)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \times$$

$$\times \operatorname{sen}(2k+1)\psi \quad (r \geqslant R).$$

72. $$\varphi_1 = 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \leqslant R),$$

$$\varphi_2 = 2\pi R(\sigma_a + \sigma_b) \ln \frac{R}{r} +$$

$$+ 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \geqslant R).$$

El potencial resulta determinado con precisión hasta el sumando constante φ_0 y es homogéneo a lo largo del eje Z, coincidente con el eje de la superficie cilíndrica.

73. El origen de las coordenadas se sitúa en el centro del círculo y el eje Z se orienta perpendicularmente a su plano. El potencial, en coordenadas cilíndricas, no depende del ángulo polar, mientras que respecto a la variable z es una función par $\varphi(r, -z) = \varphi(r, z)$. Aplicando el método de separación de variables, buscamos la solución en la forma de:

$$\varphi(r, z) = F(r)\, Z(z). \tag{1}$$

Después de introducir esta expresión en la ecuación de Laplace obtenemos

$$-\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)}{F} = \frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = C.$$

Para que el potencial (1) disminuya en caso de que $|z| \to \infty$ la constante C tiene que ser real y positiva $C = \lambda^2$, donde para mayor determinación consideramos $\lambda > 0$. Entonces

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \lambda^2 F = 0. \tag{3}$$

De la ecuación (2) se obtiene

$$Z = a_\lambda e^{-\lambda|z|}, \tag{4}$$

donde la constante a_λ deberá hallarse.

Una solución limitada de la ecuación (3) se expresa mediante la función de Bessel (S6.2) de orden cero.

$$F(r) = b_\lambda J_0(\lambda r), \tag{5}$$

multiplicada por una constante arbitraria b_λ.

El producto de las funciones (4) y (5) es una solución particular de la ecuación de Laplace, que corresponde a un valor fijo del parámetro λ, el cual puede aquí variar continuamente. Por esto, la solución general tiene la siguiente forma:

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \lambda c_\lambda J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda|z|}\, d\lambda, \tag{6}$$

donde para comodidad se ha introducido la designación $a_\lambda b_\lambda = \lambda c_\lambda$. El factor c_λ como función del parámetro λ, se elige de forma que se cumpla la condición de frontera

$$\int_0^\infty c_\lambda J_0(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda = \begin{cases} \varphi_0 & \text{para} \quad r < R, \\ 0 & \text{para} \quad r > R. \end{cases}$$

La correlación obtenida es el desarrollo en integral de Fourier—Bessel de la función que está a la derecha de esta igualdad*). Esto permite calcular el factor c_λ según la fórmula (S6.24). Como resultado, el potencial (6) se escribirá en forma de la siguiente integral respecto al parámetro λ:

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 R \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda R) e^{-\lambda|z|} d\lambda.$$

Esta integral es fácil de expresar mediante funciones especiales expuestas en la obra [9]. Se puede también expresar en forma de serie de polinomios de Legendre la cual se obtuvo de otra forma en el problema 69.

74. $$\varphi(r, z) = 2\pi\sigma R \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda R) e^{-\lambda|z|} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

75. $$\varphi(r, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \operatorname{sen} R\lambda e^{-\lambda|z|} \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$\sigma = \frac{\varphi_0}{\pi^2 \sqrt{R^2 - r^2}} \text{ para } r < R.$$

Indicación. La condición de frontera en el plano $z = 0$, sobre el cual se encuentra el disco, hay que escribirla en la siguiente forma

$$\varphi(r, 0) = \varphi_0 \quad \text{para} \quad r < R,$$
$$\frac{\partial\varphi(r, 0)}{\partial z} = 0 \quad \text{para} \quad r > R,$$

La segunda correlación indica que fuera del disco no hay cargas superficiales. A continuación es necesario aprovechar las correlaciones conocidas

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \frac{\operatorname{son} R\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad r < R;$$

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \operatorname{sen} R\lambda \, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{para } r > R, \\ \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} & \text{para } r < R. \end{cases}$$

*) Sobre el desarrollo en integral de Fourier—Bessel [véase los manuales [7, 8].

§ 6. Densidad de carga en cuerpos de diferente configuración

76. $\rho = \dfrac{3a}{2\pi}\cos\psi$ para $r < R$, $\rho = 0$ para $r > R$.

77. $\rho = e\delta(\mathbf{r}) + \dfrac{3e}{4\pi R^3}$ $(r < R)$, $\rho = 0$ $(r > R)$; $Q = 2e$.

78. La esfera de radio R está cargada uniformemente con densidad superficial $\sigma = Q/4\pi R^2$.

79. La superficie cilíndrica de radio R está cargada uniformemente con densidad superficial $\sigma = q/4\pi R$.

80. a) $2R\sigma\delta(x^2+y^2+z^2-R^2)$, $2R\sigma\delta(r^2+z^2-R^2)$, $\sigma\delta(r-R)$;

b) $2Rq\delta(x^2+y^2-R^2)\,\delta(z)$, $q\delta(r-R)\,\delta(z)$,

$\dfrac{q}{R}\delta(r-R)\,\delta(\cos\theta) = \dfrac{q}{|R}\delta(r-R)\,\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $q\delta(x)\,\delta(y)$, $\dfrac{q}{\pi r}\delta(r)$, $\dfrac{2q}{\pi r^2}\delta(1-\cos^2\theta)$,

d) $\sigma\delta(z)$, $\sigma\delta(z)$, $\dfrac{\sigma}{r}\delta(\cos\theta) = \dfrac{\sigma}{r}\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

e) $2R\sigma\delta(x^2+y^2-R^2)$, $\sigma\delta(r-R)$, $\sigma\delta(r\operatorname{sen}\theta-R)$. *Indicación.* Es menester examinar el elemento de volumen ΔV, el cual contiene en su interior una parte de la distribución dada de la carga con una magnitud

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho\, dV. \qquad (1)$$

La densidad espacial ρ que se busca debe satisfacer las siguientes exigencias. Si inicialmente se dio la distribución de la carga en la superficie con una densidad superficial σ, entonces después de la integración (1) respecto a la coordenada transversal ξ,

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho\, d\xi\, dS,$$

la expresión para la carga ΔQ tiene que tomar la forma

$$\Delta Q = \int_{\Delta S} \sigma\, dS,$$

donde ΔS es la parte de la superficie cargada dada que se encuentra dentro del espacio que se examina. Análogamente si se da la distribución de la carga en un contorno lineal con una densidad lineal q, entonces, después de la integración (1) respecto a dos coordenadas transversales ξ y η

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho\, d\xi\, d\eta\, dl,$$

la expresión para la carga ΔQ debe tomar la forma

$$\Delta Q = \int\limits_{\Delta L} q\, dl,$$

donde ΔL es la parte del contorno lineal cargado que resultó dentro del espacio que se examina ΔV.

81. a) $\rho = 2R\sigma\delta(x^2+y^2+z^2-R^2)\,\eta(z)$, $\rho = 2R\sigma\delta(r^2+z^2-R^2)\,\eta(z)$, $\rho = \sigma\delta(r-R)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

b) $\rho = 2Rq\delta(x^2+y^2-R^2)\,\delta(z)\,\eta(y)$, $\rho = q\delta(r-R)\,\delta(z)\,\eta(\pi-\psi)$, $\rho = \frac{q}{R}\,\delta(r-R)\,\delta(\cos\theta)\,\eta(\pi-\psi)$;

c) $\rho = q\delta(x)\,\delta(y)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \frac{q}{\pi r}\,\delta(r)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \frac{q}{\pi r^2}\,\delta(1-\cos\theta)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\,[\eta(r)-\eta(r-l)]$;

d) $\rho = \sigma\delta(z)\,\eta(R^2-x^2-y^2)$, $\rho = \sigma\delta(z)\,\eta(R-r)$, $\rho = \frac{\sigma}{r}\,\delta(\cos\theta)\times$ $\times\,\eta(R-r)$;

e) $\rho = 2R\sigma\delta(x^2+y^2-R^2)\,[\eta(z)-\eta(z-l)]$, $\rho = \sigma\delta(r-R)\,[\eta(z)-$ $-\eta(z-l)]$, $\rho = \sigma\delta(r\,\mathrm{sen}\,\theta - R)\,\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\,[\eta(r)-\eta(r-\sqrt{R^2+h^2})]$.

82. $\rho = \frac{2q}{b}\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2}{a^2}}\,\delta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\delta(z)$.

83. $\rho = \frac{2\sigma}{b}\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,\delta\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1\right)$.

84. La carga con densidad lineal $q = 1/2\pi a$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje Z.

85. a) Dos planos $x = a$ y $x = -a$ están cargados uniformemente con densidad superficial σ;

b) dos rectas $x = a$, $z = 0$ y $x = -a$, $z = 0$ están cargadas uniformemente con una densidad lineal q;

c) la circunferencia $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$ que se encuentra sobre el plano XY está cargada uniformemente con densidad lineal q;

d) la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que se encuentra sobre el plano XY está cargada con una densidad lineal $q = \frac{aQ}{2\pi\sqrt{a^4+(b^2-a^2)\,x^2}}$. La carga total de la elipse es Q;

e) la superficie elíptica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ está cargada con una densidad superficial

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi ab\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)}}.$$

La carga total de la superficie elíptica es Q.

§ 7. Momento dipolar

87. $\rho = \frac{\sigma}{r}\,\delta(\theta-\theta_0)\,\eta(l-r)$, $\theta_0 = \operatorname{arc\,sen}\frac{R}{l}$; $d_x = d_y = 0$, $d_z = \frac{2}{3}\pi\sigma R l^2\sqrt{1-R^2/l^2}$.

88. $\rho = \frac{q}{r}\,\delta(z)\,\delta(\psi-\psi_0)\,\eta(l-r)$; $d_x = 1/2 q l^2 \cos\psi_0$, $d_y = 1/2 \times q l^2 \operatorname{sen}\psi_0$, $d_z = 0$.

89. Un dipolo puntual con momento $\mathbf{d}$ es un caso límite de un sistema de dos cargas e y $-e$, la distancia l entre las cuales tiende a cero, mientras que la magnitud absoluta de las mismas en este caso se convierte en infinito, así que

$$\lim_{\substack{l\to 0\\ e\to\infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d},$$

donde el vector $\mathbf{l}$ está orientado a partir de la carga negativa a la positiva.

La distribución de la densidad espacial en el caso cuando las cargas e y $-e$ están ubicadas en puntos con radio vectores $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$ y $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_0$ se expresa por la función

$$\rho_e(\mathbf{r}) = e\,[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+) - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)].$$

Si en la expresión dada se pasa a un límite doble, $l \to 0$ y $e \to \infty$, se obtiene la densidad espacial de la carga de un dipolo puntual

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{l\to 0\\ e\to\infty}} el\,\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+)-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_-)}{l} = d\,\frac{\partial'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}}\Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0},$$

donde la derivada en la dirección del vector $\mathbf{l}$ se toma respecto a las coordenadas con tilde. Conforme a las fórmulas (S1.11) y

$$\frac{\partial'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}} = -\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{l}},$$

la expresión obtenida puede expresarse además así:

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d}\nabla)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

90. $\varphi = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$.

92. $U = Q\frac{\mathbf{dr}}{r^3}$; $\mathbf{F} = Q\left(\frac{3(\mathbf{dr})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}\right)$.

93. a) $\mathbf{F} = \frac{4\pi a R^5}{5}\left(\frac{\mathbf{d}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{dr})\,\mathbf{r}}{r^5}\right)$, $\mathbf{N} = \frac{4\pi a R^5}{5r^3}(\mathbf{d}\times\mathbf{r})$;

b) $\mathbf{F} = \frac{4\pi a}{5}(r^2\mathbf{d} + 2(\mathbf{dr})\,\mathbf{r})$, $\mathbf{N} = \frac{4\pi}{5}ar^2(\mathbf{d}\times\mathbf{r})$.

94. $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2 = \frac{3}{r^7}\{[r^2(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2) - 5(\mathbf{d}_1\mathbf{r})(\mathbf{d}_2\mathbf{r})]\,\mathbf{r} + r^2[(\mathbf{d}_2\mathbf{r})\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{d}_1\mathbf{r})\,\mathbf{d}_2]\}$; $\mathbf{N}_1 = \frac{(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_1)}{r^3} + \frac{3(\mathbf{d}_2\mathbf{r})(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{r})}{r^5}$,

$$\mathbf{N}_2 = \frac{(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)}{r^3} + \frac{3(\mathbf{d}_1\mathbf{r})(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{r})}{r^5}.$$

95. $\varphi = -\mathbf{ar}/r^3$. El vector a representa de por sí el momento del dipolo puntual tomado con el signo negativo.

96. El momento dipolar eléctrico $\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,dV'$ de un elemento de volumen dV', que se encuentra en el punto con radio vector $\mathbf{r}'$, engendra en el punto de observación con radio vector $\mathbf{r}$ el siguiente potencial

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,\mathbf{R}}{R^3}\,dV',$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Aplicando el método de superposición encontramos el potencial creado por el momento dipolar eléctrico del volumen V:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,\mathbf{R}}{R^3}\,dV'. \qquad (1)$$

Utilicemos la correlación

$$\operatorname{div}' \frac{\mathbf{P}}{R} = \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}}{R} + \mathbf{P}\operatorname{grad}' \frac{1}{R},$$

donde las derivadas se toman respecto a las coordenadas con tilde. Entonces, la integral (1), mediante el teorema de Gauss—Ostrogradski (S1.15) adquiere la forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R}\,dS' - \int_V \frac{\operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R}\,dV'.$$

Ampliemos ilimitadamente el volumen V en todas las direcciones. En este caso, la integral por la superficie S, que limitaba el volumen V, se anula. Esto último está condicionado a que la función subintegral en la superficie S decrece con mayor rapidez que $1/r'^3$, mientras que la superficie de integración S aumenta proporcionalmente a r'^2. Como resultado

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{-\operatorname{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dV'.$$

Comparando la expresión obtenida con la solución general de la ecuación de Poisson (I.11), se llega a la conclusión de que un momento dipolar eléctrico distribuido engendra en el espacio un campo eléctrico similar al de una carga con densidad espacial $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$.

§ 8. Tensor del momento cuadripolar

98. $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = D_{22} = -36\, ea^2$, $D_{33} = 72\, ea^2$, $d = 0$.

99. a) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 3/8\ QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$;
b) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 1/2\ QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$;
c) $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 1/3\ QR$, $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = D_{22} = QR^2/12$, $D_{33} = -QR^2/6$.

100. $D_{\alpha\beta} = 0$.

101. Pasemos al sistema de coordenadas con tilde, cuyo origen se encuentra en el centro de curvatura del hemisferio, y donde los ejes X', Y' y Z' son paralelos a los ejes homónimos X, Y y Z. En el sistema de coordenadas con tilde tenemos $d_1' = d_2' = 0$, $d_3' = QR/2$ y $D'_{\alpha\beta} = 0$. Apliquemos la ley de transformación de coordenadas

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}', \quad a_1 = a_2 = R, \ a_3 = 0$$

y fijemos el vínculo existente entre las componentes de los tensores $D_{\alpha\beta}$ y $D'_{\alpha\beta}$ en los sistemas de coordenadas inicial y con tilde:

$$D_{\alpha\beta} = D'_{\alpha\beta} + Q\,(3a_\alpha a_\beta - a^2\delta_{\alpha\beta}) + 3\,(a_\alpha d'_\beta + d'_\alpha a_\beta) - 2ad'\delta_{\alpha\beta}.$$

De donde hallamos

$$D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

102. $D_{\alpha\beta} = \dfrac{QR^2}{2\pi}\begin{pmatrix} 5\pi & 12 & 0 \\ 12 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & -4\pi \end{pmatrix}$.

103. Representemos el tensor del momento cuadripolar de la elipse cargada en forma de

$$D_{\alpha\beta} = q \oint (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dl, \tag{1}$$

donde la integral curvilínea se toma respecto al contorno de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{2}$$

Como se ve, de cero difieren solamente las componentes diagonales del tensor $D_{\alpha\beta}$. La integral a lo largo del contorno cerrado (1) es equivalente a la integral cuadriplicada a lo largo del arco de la elipse que se encuentra en el primer cuadrante del plano XY. La integración a lo largo del arco indicado de la alipse se sustituye por la integración a lo largo del tramo $[0, a]$ del eje X;

$$D_{11} = 4q \int_0^a (2x^2 - y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

donde la función $y = y(x)$ se da por las expresiones (2). La última integral puede, mediante un cambio de la variable $x = a\xi$ y la fór-

mula $b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$, escribirse así:

$$D_{11} = 4qa^3 \int_0^1 [3\xi^2 - 1 + \varepsilon^2 (1 - \xi^2)] \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \xi^2}{1 - \xi^2}}\, d\xi.$$

La expresión subintegral se desarrolla en serie respecto al parámetro pequeño ε^2, dejando los dos primeros sumandos de esta serie. Las integrales respecto a la variable ξ que surgen en este caso son integrales de tabla. Definitivamente obtenemos

$$D_{11} = \pi q a^3 (1 + 3/8\varepsilon^2), \quad D_{22} = \pi q a^3 \left(1 - \frac{15}{8} \varepsilon^2\right),$$

$$D_{33} = -2\pi q a^3 (1 - 3/4\varepsilon^2), \quad D_{\alpha\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta.$$

104. Expresemos el tensor del momento cuadripolar que se busca de la siguiente manera

$$D_{\alpha\beta} = \sigma \oint (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})\, dS,$$

donde la integración se realiza a lo largo de la superficie elíptica cerrada

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

En el caso de cuerpos de revolución es suficiente calcular solamente la componente D_{33}. Utilicemos la sustitución de variables

$$x = ax', \quad y = ay', \quad z = bz'$$

y pasemos a la integración a lo largo de la esfera de radio unitario

$$D_{33} = \sigma a^2 \oint |2b^2 z'^2 - a^2 (x'^2 + y'^2)| \times$$

$$\times \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}}\, dS',$$

donde

$$z'^2 = 1 - x'^2 - y'^2,$$

$$b^2 = a^2 (1 + \varepsilon^2) \quad \text{para} \quad b > a,$$

$$b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2) \quad \text{para} \quad b < a.$$

La expresión subintegral se desarrolla en serie respecto al párametro pequeño ε^2, dejando los sumandos con el menor valor de exponente. Como resultado obtenemos

$$D_{33} = \pm \frac{32\pi}{15} \sigma a^4 \varepsilon^2,$$

donde el signo superior + se elige para $b > a$, y el inferior—para $b < a$. Las otras componentes del tensor que se busca

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{2} D_{33},$$

$$D_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta.$$

105.

$$D_{\alpha\beta} = 12ea^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D'_{\alpha\beta} = 12ea^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

106. $d_1 = d(\cos\alpha - 1)$, $d_2 = d \operatorname{sen}\alpha$, $d_3 = 0$;

$$D_{\alpha\beta} = ad \begin{pmatrix} 4(1+\cos\alpha) & 3\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 3\operatorname{sen}\alpha & -2(1+\cos\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -2(1+\cos\alpha) \end{pmatrix}.$$

Indicación. Cada dipolo puntual con momento **d** deberá examinarse como el caso límite de un sistema con cargas e y $-e$, que distan l una de otra y que se aproximan ilimitadamente, aumentando su valor absoluto. Con esto

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} el = \mathbf{d} \qquad (1)$$

donde el vector **l** está orientado a partir de la carga negativa a la positiva. En las componentes del tensor del momento cuadripolar, expresado para un sistema aislado de dos cargas e y $-e$, es necesario pasar al límite doble $l \to 0$ y $e \to \infty$, teniendo en cuenta la expresión (1).

107. $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = D_{22} = \frac{Q}{5}(a^2 - b^2)$, $D_{33} = \frac{2Q}{5}(b^2 - a^2)$. Después de girar el elipsoide el tensor $D_{\alpha\beta}$ adquiere la forma:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{Q(b^2 - a^2)}{5} \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen}^2\alpha - 1 & 0 & 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & 3\cos^2\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

108. $D_{11} = \frac{Q}{5}[a^2(3\cos^2\alpha - 1) + b^2(3\operatorname{sen}^2\alpha - 1) - c^2]$,

$D_{22} = \frac{Q}{5}[a^2(3\operatorname{sen}^2\alpha - 1) + b^2(3\cos^2\alpha - 1) - c^2]$,

$D_{33} = \frac{Q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2)$,

$D_{12} = \frac{3Q}{5}(a^2 - b^2)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$,

$D_{12} = D_{23} = 0$.

109. $D_{\alpha\beta}=\dfrac{QR^2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha & 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\\ 0 & 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & 3\,\mathrm{sen}^2\,\alpha-2\end{pmatrix}$.

110. $E_\gamma(\mathbf{r})=D_{\alpha\beta}x_\alpha\left(\dfrac{5}{2}\dfrac{x_\beta x_\gamma}{r^7}-\dfrac{\delta_{\beta\gamma}}{r^5}\right)$.

111. $\varphi=\dfrac{3}{r^5}a_{\alpha\beta}(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})$. Con ayuda de la correlación $a_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}r^2=a_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ y las fórmulas (S2.16) y (S2.22), el potencial puede reducirse a la forma canónica

$$\varphi=\frac{D_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5},$$

en la cual el tensor

$$D_{\alpha\beta}=3\,[3\,(a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha})-2a_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta}]$$

es simétrico y además su traza resulta nula $D_{\sigma\sigma}=0$. Por consiguiente, las componentes de $D_{\alpha\beta}$ forman el tensor del momento cuadripolar. La magnitud $a_{\alpha\beta}$ es proporcional al tensor del momento cuadripolar en el caso de que $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ y $a_{\sigma\sigma}=0$.

112. $d_x=\dfrac{i}{\sqrt{2}}(Q_1^{(1)}-Q_{-1}^{(1)})$, $d_y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(Q_1^{(1)}+Q_{-1}^{(1)})$, $d_z=-iQ_0^{(1)}$;

$D_{11}=Q_0^{(2)}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}(Q_2^{(2)}+Q_{-2}^{(2)})$, $D_{12}=i\sqrt{\dfrac{3}{2}}(Q_2^{(2)}-Q_{-2}^{(2)})$,

$D_{13}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}(Q_1^{(2)}-Q_{-1}^{(2)})$, $D_{22}=Q_0^{(2)}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}(Q_2^{(2)}+Q_{-2}^{(2)})$,

$D_{23}=-i\sqrt{\dfrac{3}{2}}(Q_1^{(2)}+Q_{-1}^{(2)})$, $D_{33}=-2Q_0^{(2)}$.

113. a) $U=ea^2\dfrac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x^2}$;

b) $U=e\varphi(0)-\dfrac{2ea}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial\varphi(0)}{\partial x}+\dfrac{ea^2}{12}\left(3\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(0)$;

c) $U=ea^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(0)$;

d) $U=Q\varphi(0)+\dfrac{Q}{10}\left(a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+c^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(0)$.

114. $U=Q\varphi(0)+\dfrac{Q}{8}\left(a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(0)$;

$$\mathbf{F}=Q\mathbf{E}(0)+\frac{Q}{8}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{E}(0),$$

donde $\mathbf{E}(0)=-\mathrm{grad}\,\varphi(0)$ es la intensidad del campo eléctrico exterior.

115. $\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + (\mathbf{d}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{E} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$,

donde la intensidad del campo eléctrico y sus derivadas se toman en el punto que está ubicado en el interior del sistema cargado. Este punto sirve de origen al sistema cartesiano de coordenadas en el cual están calculadas las magnitudes $\mathbf{d}$ y $D_{\alpha\beta}$.

116. $N_\alpha = e_{\alpha\beta\nu} d_\beta E_\nu + \frac{1}{3} e_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta} \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\delta}$,

donde la intensidad del campo eléctrico y sus derivadas se toman en el punto que está ubicado en el interior de la región cargada. Este punto sirve de origen al sistema cartesiano de coordenadas en el cual están calculadas las magnitudes $\mathbf{d}$ y $D_{\alpha\beta}$.

117. $\mathbf{F} = -36ea^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(0)}{\partial z^2}$;

$$N_x = 72ea^2 \frac{\partial E_z(0)}{\partial y}, \quad N_y = -72ea^2 \frac{\partial E_x(0)}{\partial z}, \quad N_z = 0.$$

118. $N_x = N_y = 0, \quad N_z = \frac{eql^3}{x^3} \operatorname{sen} 2\psi_0$.

§ 9. El campo a grandes distancias de un sistema cargado.

119. a) $\varphi = \frac{\pi}{2} qR^3 \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}$;

b) $\varphi = \frac{\pi}{4} \rho h R^2 \left(R^2 - \frac{4}{3} h^2 \right) \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}$;

c) $\varphi = \pi\sigma h R \left(R^2 - \frac{2}{3} h^2 \right) \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}$;

d) $\varphi = \frac{ql^3}{3} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$.

120. a) $\varphi = \frac{ea^2}{r^2} (3\cos^2\theta - 1)$;

b) $\varphi = \frac{e}{r} - \frac{2ea}{\sqrt{3}\, r^2} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi - \frac{ea^2}{12r^3} \times$

$$\times |2 + 3\operatorname{sen}^2\theta (1 - 4\cos^2\psi)|;$$

c) $\varphi = -\frac{3ea^2}{2r^3} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen} 2\psi$.

121. $D_{\alpha\beta} = 6ad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi = 6ad \frac{xz}{r^5}$.

122. $\psi_0 = \pi \pm 2 \sqrt{\frac{2l}{3x_0}}$.

123. $\varphi = \frac{4QR}{\pi r^3} \left[y - R + \frac{3Ry}{r^2} (x + y) \right]$.

Indicación. Empléese el método expuesto para la solución del problema 101.

124. $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r^3}(Rx + hz) + \frac{Q}{2r^5}\left[\left(\frac{9}{4}R^2 - \frac{4}{3}h^2\right)x^2 - \right.$

$$\left. -\left(\frac{3}{4}R^2 + \frac{4}{3}h^2\right)y^2 + \left(\frac{8}{3}h^2 - \frac{3}{2}R^2\right)z^2 + 6Rhxz\right].$$

Indicación. Aplíquese el método expuesto para la solución del problema 101.

125. a) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{4r^3}[3(a^2\cos^2\psi + b^2\operatorname{sen}^2\psi)\operatorname{sen}^2\theta - a^2 - b^2]$;

b) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{6}Q(b^2 - a^2)\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$;

c) $\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{6r^3}[a^2(3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\psi - 1) +$

$$+ b^2(3\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi - 1) + c^2(3\cos^2\theta - 1)].$$

126. $\varphi(r, 0, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{r^{l+1}} Q_0^{(l)} P_l(\cos\theta)$,

$$Q_0^{(2k)} = 2\pi\sigma R^2\delta_{0k}, \quad Q_0^{(2k+1)} = \frac{i2\pi\sigma R^{2k+3}(2k)!}{2^{k+1}k!\,(k+1)!},$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

127. $F_x = F_z = 0, \quad F_y = \frac{12QRd}{\pi z^4}$;

$$N_x = \frac{4QRd}{\pi z^3}, \quad N_y = N_z = 0.$$

128. $U = -\frac{Q(\mathbf{dr})}{r^3} + \frac{3Q}{10r^5}\left\{\left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5x^2}{r^2}\right) + 2d_1x\right]a^2 + \right.$

$$\left. + \left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5y^2}{r^2}\right) + 2d_2y\right]b^2 + \left[(\mathbf{dr})\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) + 2d_3z\right]c^2\right\}.$$

129. $\mathbf{F} = \frac{eQ}{z^2}\left[\left(1 - \frac{3R^2}{2z^2}\right)\mathbf{l}_z - \frac{2R}{\pi z}\mathbf{l}_y\right]$.

130. $\Delta F_x = \frac{3Qex}{10r^7}[5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(3a^2 + b^2 + c^2)]$.

$$\Delta F_y = \frac{3Qey}{10r^7}[5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(a^2 + 3b^2 + c^2)],$$

$$\Delta F_z = \frac{3Qez}{10r^7}[5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(a^2 + b^2 + 3c^2)].$$

131. $U = -3888\frac{e^2a^4}{L^5}$.

§ 10. Capa eléctrica doble

132. $\varphi(z) = 2\pi\tau\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\frac{z}{|z|}$ para $z \neq 0$,

$$\varphi(0) = 0; \quad E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi\tau R^2}{(z^2+E^2)^{3/2}}.$$

133. $\varphi(z) = 2\pi\tau\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ para $z > R$, $\varphi(R) = -\sqrt{2}\,\pi\tau$,

$$\varphi(z) = -2\pi\tau\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \text{ para } z < R.$$

134. En coordenadas cilíndricas $\varphi = 2\tau(\pi - \psi)$ para $0 < \psi < 2\pi$, $\varphi = 0$ para $\psi = 0$; $E_r = E_z = 0$, $E_\psi = 2\tau/r$.

135. $F_x = F_y = 0, \quad F_z = -\frac{2\pi\tau e R^2}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}$.

136. Por encima de la parte positiva de la capa eléctrica doble $\varphi = 2\pi\tau$. Sobre su superficie $\varphi = 0$. Debajo de la parte negativa $\varphi = -2\pi\tau$.

137. El potencial de una capa eléctrica doble es $\varphi = \tau\Omega$, donde Ω es el ángulo sólido bajo el cual se observa la parte positiva de la capa (para la negativa los razonamientos son análogos). Sea que la capa se ha desplazado paralelamente a sí misma en la magnitud $d\mathbf{a}$. El elemento $d\mathbf{l}'$ del contorno L sobre el que está tendida la capa, describe la superficie $d\mathbf{a} \times d\mathbf{l}'$. Esta se ve desde el punto de observación bajo el ángulo sólido $\frac{(d\mathbf{a} \times d\mathbf{l}')\,\mathbf{R}}{R^3}$, donde el vector $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ está trazado desde el elemento de la superficie al punto de observación. La variación total del ángulo sólido al desplazarse la capa resulta igual a:

$$d\Omega = d\mathbf{a} \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \tag{1}$$

El potencial en el punto de observación variará correspondientemente en la magnitud $d\varphi = \tau\, d\Omega$. Si la capa queda inmóvil y el punto de observación se desplaza en sentido contrario en la magnitud $d\boldsymbol{\varepsilon} = -d\mathbf{a}$, el valor numérico del ángulo sólido (1) no varía. Sin embargo, la variación del potencial en este caso se expresa mediante la intensidad del campo eléctrico de la siguiente forma:

$$d\varphi = -d\boldsymbol{\varepsilon}\tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = -d\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}.$$

En vista de la arbitrariedad del vector $d\boldsymbol{\varepsilon}$, encontramos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Capítulo II CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

§ 1. Ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera en magnetostática

138. Si el campo magnético dado satisface las ecuaciones homogéneas de Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ y $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, evidentemente se podrá encontrar tal distribución de la corriente en el exterior de la región hueca y en su superficie la cual engendra este campo. Al contrario, si en el interior de la cavidad el rotacional o la divergencia del vector H difiere de cero, entonces ninguna distribución de corriente puede engendrar el campo magnético dado. En relación con esto es necesario calcular el rotacional y la divergencia de la función vectorial dada:

a) sí, puesto que $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ y $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$;

b) no, porque $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (\mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y + \mathbf{l}_z)\, b$ y $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$;

c) sí, puesto que $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ y $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

139. No, ya que $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$.

140. a) $\mathbf{j} = \frac{c}{2\pi}\left[f(r)\,\mathbf{a} + \frac{df(r)}{dr}\,\frac{(\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}))}{2r}\right]$;

b) $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,[3\,(\mathbf{ar})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{r}]$;

c) $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \frac{acr}{4\pi} \operatorname{sen} \theta$ para $r \leqslant R$, $\mathbf{j} = 0$ $(r > R)$;

d) $j_r = 0$, $j_\psi = \frac{bcr}{2\pi}$, $j_z = \frac{gc}{2\pi}$ para $r \leqslant R$, $\mathbf{j} = 0$ $(r > R)$.

144. De la ecuación de Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$ se deduce que $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Por lo tanto, dentro de la región limitada dada circulan corrientes cerradas, cuyas líneas de corriente son curvas cerradas. En vista de esto subdividimos la integral de volumen en una suma de integrales

$$\int \mathbf{j}\, dV = \sum_i J_i \oint_{L_i} d\mathbf{l}_i \qquad (1)$$

de tubos suficientemente finos cerrados y separados, para los cuales es justa la sustitución

$$\mathbf{j}\, dV_i \to J_i\, d\mathbf{l}_i$$

donde J_i es la corriente lineal del i-ésimo tubo, en tanto que $d\mathbf{l}_i$ es un elemento del eje L_i de este tubo de corriente. El eje de cada tubo está

orientado por las correspondientes líneas de corriente cerrada. La igualdad (1) resulta más precisa cuanto más finos se elijan los tubos de corriente. La integral lineal $\oint\limits_{Li} dl_i$ es nula, con semejanza a la suma de vectores que componen un polígono cerrado. Por lo tanto $\int \mathbf{j}\, dV = 0$.

145. Para un volumen arbitrario V, tenemos

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int\limits_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = -\frac{1}{c} \int\limits_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(r')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV',$$

donde se utiliza $\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. En la última integral la divergencia se calcula respecto a las coordenadas con tilde. Valiéndose del teorema de Gauss—Ostrogradski (S1.15), hallamos

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \oint\limits_S \frac{j_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dS'. \qquad (1)$$

Si las corrientes fluyen en un volumen limitado V, entonces, en la superficie de integración $j_n(\mathbf{r}')$ se anula y la condición de Lorentz se cumple. Si las corrientes circulan en un espacio ilimitado, al ampliar el volumen V en todas las direcciones la integral superficial (1) también se anula. Esto está relacionado con que la superficie S aumenta proporcionalmente a r'^2 al tiempo que la función subintegral decrece más rápido que $1/r'^2$.

146. La corriente continua tiene que circular en una región limitada. En este caso la expresión $\frac{1}{2c} \int \mathbf{jA}\, dV$ resulta invariante respecto a la transformación de la calibración (II.10), y tiene sentido físico de la energía del campo magnético.

148. a) $i_x = i_y = 0$, $i_z = \frac{cH}{4\pi}$ en el plano $x = a$,

$i_x = i_y = 0$, $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$ en el plano $x = b$;

b) $i_x = i_y = 0$, $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$ en los planos $x = a$ y $x = b$;

c) $i_r = i_z = 0$, $i\psi = \frac{cH}{4\pi}$, donde el eje Z del sistema cilíndrico de coordenadas está orientado a lo largo del eje de la superficie cilíndrica paralelamente al vector H.

149. a) En coordenadas cilíndricas $\mathbf{j} = \delta(r - R)\, \mathbf{i}_0$;
b) en coordenadas cartesianas $\mathbf{j} = J\delta(x)\, \delta(y)\, \mathbf{i}_z$;
c) en coordenadas cartesianas $\mathbf{j} = \delta(z)\, \mathbf{i}_0$;
d) en coordenadas cilíndricas $j_r = j_z = 0$, $j_\psi = J\delta(r - R) \times \delta(z)$;
e) en coordenadas esféricas $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \sigma\omega r \delta(r - R) \times \operatorname{sen}\theta$;
f) en coordenadas esféricas $j_r = j_\theta = 0$, $j_\psi = \sigma\omega \operatorname{sen}\theta_0 \delta \times (\theta - \theta_0)$.

150. No, ya que $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$, donde $\mathbf{j} = i_0 \delta(x)(\mathbf{l}_y e^{-ay^2} + \mathbf{l}_z e^{-az^2})$.

151. a) En los planos $x = a$ y $x = -a$ la corriente fluye con una densidad superficial i_0; b) por las rectas $x = a$ y $x = -a$, situadas sobre el plano XY, paralelamente al eje Y fluye una corriente lineal J.

152. Tendamos sobre el contorno L una superficie arbitraria S la cual convierte el espacio circundante en una región simplemente conexa. En los puntos que no se encuentran en el contorno de corriente L, la ecuación de Maxwell (II.2) es homogénea $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Conforme al teorema (S1.22) el campo magnético en estos puntos puede ser representado como $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$, donde $\Phi = \Phi(x, y, z)$ es cierta función dada en la región simplemente conexa. Representemos ésta de forma que la segunda ecuación de Maxwell $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ también sea válida al sustituir la expresión $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$. Para esto, la función Φ tiene que ser la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ con la condición suplementaria que se desprende del teorema sobre la circulación de la intensidad del campo magnético

$$\oint_C \mathbf{H}\tau \, dl = \frac{4\pi}{c} J, \tag{1}$$

Aquí τ es el versor tangente al contorno de integración C, abarcado por la corriente lineal J. Además de esto, si el contorno de corriente L se encuentra en una región limitada, la función Φ se anula en el infinito. De esta manera, la función determinada Φ se denomina potencial escalar del campo magnético.

La superficie S, tendida sobre el contorno de corriente L, cortará el contorno de integración C en cierto punto. Designemos con los puntos 2 y 1 el comienzo y final del contorno seccionado C', y mediante Φ_2 y Φ_1 el valor del potencial en estos puntos en diferentes lados de la superficie S. La integral (1) por el contorno seccionado

$$-\int_{C'} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} dl = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{4\pi}{c} J. \tag{2}$$

Como se ve, el potencial escalar Φ sufre un salto al pasar a través de la superficie S tendida sobre el contorno de corriente L, aunque la derivada $\partial\Phi/\partial\tau$ se mantiene continua. Mientras tanto, la magnitud Φ coincide formalmente con el potencial de la capa eléctrica doble S cuya densidad del momento dipolar es equivalente a J/c. Así pues, el potencial escalar Φ satisface la ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$ y la condición suplementaria (2) en la superficie fijada S tendida sobre el contorno de corriente L.

153. Elijamos en calidad de superficie fija tendida sobre el contorno de corriente un semiplano $y = 0$, $x \geqslant 0$. La ecuación $\nabla^2 \Phi = 0$ con la condición suplementaria

$$\oint_{C_r'} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dl = -\frac{4\pi}{c} J$$

se soluciona en coordenadas cilíndricas. Aquí, como contorno de integración C_r' se elige una circunferencia de radio arbitrario r con centro en el eje Z. Su plano es perpendicular a la corriente lineal J. El contor-

no de integración C_r' se corta en cierto punto del semiplano $y = 0$, $x \geqslant 0$.

De las condiciones del problema se desprende que la función que se busca Φ no depende de las coordenadas z y r, mientras que la dependencia del ángulo polar ψ es lineal $\Phi = \Phi_0 + a\psi$, siendo Φ_0 y a constantes. La condición suplementaria se cumple para $a = -\frac{2J}{c}$ y Φ_0 arbitraria. De esta manera, el potencial se determina con una precisión hasta un sumando arbitrario. Definitivamente

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{2J}{c}\psi, \quad H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J}{cr}.$$

La función Φ sufre un salto $\frac{4\pi}{c}J$ al pasar a través del semiplano $y = 0$, $x \geqslant 0$, la cual roza con la corriente lineal J. Si se admite que la constante arbitraria es equivalente a $\Phi_0 = \frac{4\pi}{c}J$, entonces la magnitud Φ coincide formalmente con el potencial de la capa eléctrica doble $y = 0$, $x \geqslant 0$ con densidad del momento dipolar J/c (véase el problema 134).

§ 2. Momento magnético

154. $\mu_x = \mu_y = 0, \quad \mu_z = \frac{e\hbar}{2mc}$.

155. $\mu = \frac{4\pi a}{c}\int\limits_0^\infty r^2 F(r)\,dr$.

156. $\mu = -\frac{a}{c}$.

157. $\omega = \frac{5mc^2}{2\hbar}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^2$. Si la carga está extendida por la superficie de la esfera, la velocidad angular disminuye en 5/3 veces.

La noción sobre el electrón como una esfera en rotación contradice el postulado fundamental de la teoría de la relatividad, conforme al cual la velocidad de movimiento de los puntos materiales no supera la velocidad de la luz en el vacío. Entre tanto, en el modelo clásico de electrón que se examina la velocidad lineal $v = \omega R$ de los puntos periféricos de la esfera en rotación supera en dos órdenes la velocidad de la luz en el vacío. Por ejemplo, en el caso de una esfera tenemos

$$\frac{v}{c} = \frac{5}{2}\frac{\hbar c}{e^2}, \quad \text{donde} \quad \frac{\hbar c}{e^2} = 137.$$

158. Pasemos al sistema de coordenadas con tilde $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$, en el cual la distribución de la densidad espacial de la corriente se expresa por la función $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{j}(\mathbf{a} + \mathbf{r}')$, mientras que el momento magnético es:

$$\mu' = \frac{1}{2c}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}'(\mathbf{r}')\,dV'.$$

Sustituyendo las variables de integración $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, obtenemos

$$\mu' = \mu - \frac{1}{2c}\left(\mathbf{a} \times \int \mathbf{j}\, dV\right).$$

Como el vector a es arbitrario, el segundo sumando se anula en el caso de que

$$\int \mathbf{j}\, dV = 0. \tag{1}$$

Para las corrientes en una región finita la correlación (1) se obtuvo en el problema 144.

Si las corrientes fluyen en un espacio ilimitado la integral impropia (1) se determina de la siguiente manera:

$$\lim_{V \to \infty} \int \mathbf{j}\, dV = \mathbf{I}. \tag{2}$$

Multipliquemos escalarmente las dos partes de la igualdad (2) por un vector constante arbitrario $\mathbf{l} = \text{grad}\,(\mathbf{rl})$. Aprovechemos, bajo el símbolo de la integral, la identidad

$$\mathbf{j}\,\text{grad}\,(\mathbf{rl}) \equiv \text{div}\,[(\mathbf{rl})\,\mathbf{j}]$$

y modifiquemos, para cierto volumen fijo V, la integral de volumen en integral de superficie

$$\oint_S (\mathbf{rl})\, j_n\, dS = \mathbf{lI}, \tag{3}$$

donde S es una superficie cerrada que limita el volumen fijo V. Después de esto se pasa al límite $S \to \infty$, extendiendo la superficie cerrada en todas las direcciones, lo que corresponde al paso límite $V \to \infty$.

La densidad espacial de la corriente j decrece en módulo en el infinito con mayor rapidez que $1/r^4$, ya que el momento magnétiyo tiene un valor finito. Puesto que S aumenta proporcionalmente a r^2, la integral de superficie (3) se anula para $S \to \infty$. Por esto $\mathbf{II} = 0$. En vista de la arbitrariedad del vector l la integral (2) también es nula. La correlación (1) e igualdad $\mu = \mu'$ queda demostrada.

159. $W = \mu \mathbf{H}$.

Indicación. Valerse de la correlación $\Lambda = 1/2\,(\mathbf{H} \times \mathbf{r})$.

160. $W = \dfrac{QR^2}{4c}(\omega \mathbf{H})$.

161. Escribamos el momento de las fuerzas de la siguiente forma

$$\mathbf{N} = 1/c \int (\mathbf{rH})\, \mathbf{j}\, dV - \frac{\mathbf{H}}{c} \int (\mathbf{rj})\, dV.$$

Las integrales de volumen se descomponen mediante la sustitución (II.17) en una suma de integrales lineales respecto a los ejes L_i de los tubos finos de corriente

$$\mathbf{N} = 1/c \sum_i J_i \left[\oint_{L_i} (\mathbf{rH})\, d\mathbf{l}_i - \mathbf{H} \oint_{L_i} (\mathbf{r}\, d\mathbf{l}_i) \right]. \tag{1}$$

Para la segunda integral se aplica el teorema de Stokes (S1.17)

$$\oint_{L_i} \mathbf{r}\, d\mathbf{l}_i = \oint_{S_i} \operatorname{rot} \mathbf{r}\, dS_i = 0,$$

y para la primera se utiliza la fórmula (S1.10), entonces

$$\mathbf{N} = 1/c \sum_i J_i \int_{S_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{H})\, dS_i = 1/c \sum_i J_i\, (\mathbf{S}_i \times \mathbf{H}) = \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}.$$

Aquí $\mathbf{S}_i$ es el vector del área de la superficie tendida sobre el contorno del i-ésimo tubo de corriente

$$\mathbf{S}_i = \int_{S_i} d\mathbf{S}_i,$$

y $\boldsymbol{\mu}_i$ el momento magnético de la corriente lineal J_i.

162. $\mathbf{N} = \dfrac{\pi}{c} hR^3 \sigma\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H})$.

163. Introduzcamos la designación $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, $\mathbf{j}\,(\mathbf{R} + \mathbf{r}') = \mathbf{j}'\,(\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{R}$ es el radio vector de un punto fijo dentro de la región del espacio que se investiga, y pasemos a la integración respecto a las coordenadas con tilde.

$$\mathbf{F} = 1/c \int \mathbf{j}'\,(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}\,(\mathbf{R} + \mathbf{r}')\, dV'.$$

A continuación se recurre al desarrollo en serie de Taylor

$$\mathbf{H}\,(\mathbf{R} + \mathbf{r}') = \mathbf{H}\,(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H}\,(\mathbf{R}) + \ldots,$$

donde el operador ∇ actúa sobre las coordenadas del punto fijo con radio vector $\mathbf{R}$. En la primera aproximación, que difiere de cero, tenemos

$$\mathbf{F} = 1/c \int \mathbf{j}'\,(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H}\, dV',$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{H}\,(\mathbf{R})$. Seguidamente se aplican las fórmulas

$$(\mathbf{r}'\nabla)\,\mathbf{H} = \operatorname{grad} (\mathbf{r}'\mathbf{H}),$$
$$\operatorname{rot}\,[(\mathbf{r}'\mathbf{H})\,\mathbf{j}'] = \operatorname{grad} (\mathbf{r}'\mathbf{H}) \times \mathbf{j}',$$

en las cuales la diferenciación se realiza respecto a las componentes del radio vector $\mathbf{R}$. Entonces, la expresión para la fuerza que se busca se transforma en forma más cómoda

$$\mathbf{F} = -\operatorname{rot} \left[1/c \int (\mathbf{r}'\mathbf{H})\, \mathbf{j}'\,(\mathbf{r}')\, dV' \right].$$

La integral obtenida aquí ya fue calculada anteriormente al resolver el problema 161 y resulta igual al producto vectorial del momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de la corriente por el vector $\mathbf{H}$. Definitivamente hallamos

$$\mathbf{F} = -\operatorname{rot} (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}) = \operatorname{grad} (\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}),$$

donde las derivadas se toman de la función vectorial $\mathbf{H} = \mathbf{H}\,(\mathbf{R})$ respecto a las coordenadas del punto fijo con radio vector $\mathbf{R}$, además ubicado dentro de la región de corriente.

§ 3. Campo magnético a grandes distancias de la corriente

164. $\mathbf{A}=\frac{\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{H}=\frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}$, donde $\boldsymbol{\mu}$ es el momento magnético del elipsoide en rotación:

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{Qa^2\boldsymbol{\omega}}{5c}.$$

165. $\mathbf{A}=\frac{Qh^2}{4cr^3}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, $\mathbf{H}=\frac{Qh^2}{4cr^5}[3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\mathbf{r}-r^2\boldsymbol{\omega}]$.

166. $\mathbf{H}=\frac{\sqrt{3}\,a^2J}{4cr^5}[3(\mathbf{nr})\,\mathbf{r}-r^2\mathbf{n}]$. El vector unitario $\mathbf{n}$ de la normal al plano del triángulo constituye con la dirección de la corriente J un sistema a dextrógiro.

167. $W=\left(\frac{QR^2}{3c}\right)^2\left(\frac{3(\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{r})}{r^5}-\frac{\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2}{r^3}\right)$. El radio vector $\mathbf{r}$ está trazado desde el centro de la primera esfera hacia el centro de la segunda.

168. $\mathbf{F}=\frac{9Qh^2}{20c}\left(\frac{(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\,\boldsymbol{\mu}+(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{r}}{r^5}-\frac{5(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^7}\right.$.

§ 4. Ley de Biot-Savart

170. Después de situar el origen de las coordenadas en el centro de la esfera y orientar el eje Z a lo largo del vector $\boldsymbol{\omega}$, apliquemos la fórmula (II.16). En este caso la intensidad del campo magnético en el centro de la esfera se escribirá así:

$$\mathbf{H}(0)=1/c\int\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})}{r^3}\,dV,$$

donde en la variable de integración está omitido el tilde. Como resultado de la rotación, dentro de la esfera se engendra una corriente con densidad espacial $\mathbf{j}(\mathbf{r})=\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, donde $\rho=\frac{3Q}{4\pi R^3}$. Abriendo el producto vectorial doble en la expresión subintegral, obtenemos

$$\mathbf{H}(0)=1/c\int\rho\frac{r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}z\mathbf{r}}{r^3}\,dV.$$

Las integrales que contienen zx y zy se anulan como integrales de funciones impares en límites simétricos. Los sumandos restantes dan

$$\mathbf{H}(0)=\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}\int\frac{\rho\,\mathrm{sen}^2\theta}{r}\,dV.$$

La fórmula obtenida es válida para cualquier cuerpo de rotación, en cuyo interior hay distribuida una carga con densidad espacial $\rho=\rho(r,\theta)$.

En particular, para una esfera uniformemente cargada, hallamos

$$H(0) = \frac{Q\omega}{cR}.$$

Si la carga Q está extendida por la superficie, la intensidad del campo magnético en el centro de la esfera disminuye en 2/3 veces.

171. $H = \frac{\pi}{c} h\sigma\omega$.

172. $H_x = H_y = 0$, $H_z = \frac{2e\hbar}{405mca^3}$.

173. $\Delta H = -\frac{e^2 H_0}{3amc^2}$.

174. $H = \frac{Q(\omega_1 - \omega_2)\omega_1}{2c\omega_1 R}$. La intensidad del campo magnético en el centro se anula, si las cargas del primero y segundo hemisferios son $Q_1 = \omega_2 Q/(\omega_1 + \omega_2)$, $Q_2 = \omega_1 Q/(\omega_1 + \omega_2)$.

175. $H = \frac{Q\omega}{c(b^2 - a^2)}\left(b - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ arc sen } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$ $(a > b)$;

$$H = \frac{Q\omega}{c(b^2 - a^2)}\left(b - \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right) \quad (b > a).$$

176. $H = \frac{Q\omega}{cR}\left(1 - \cos\theta_0 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}\right)$.

177. $W = \frac{3(3\sqrt{2} - 4) Q\mu\omega}{2\hbar c}$.

178. $W = \frac{e\hbar\mu}{24mca^3}$.

179. $H = \frac{8\mu_0}{3a^3}$, $W = \frac{8\mu\mu_0}{3a^3}$.

180. $N = \frac{3Q}{2c}\left(\frac{b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)^3}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)$ $(\mu \times \omega)$.

181. $H = 2\pi\sigma |z| \left[\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2\right] \frac{\omega}{c}$;

$$H = \frac{\pi\sigma R^4 \omega}{2c|z|^3} \text{ para } |z| \gg R; \quad \mu = \frac{\pi\sigma R^4 \omega}{4c}.$$

182. $A = \frac{(r - r_0) \times a}{c|r - r_0|^3}$, $H = \frac{a}{c|r - r_0|^3} - \frac{3a(r - r_0)}{c|r - r_0|^5}(r - r_0)$.

El vector a es proporcional al momento magnético μ de la corriente dada conforme a la fórmula $a = -c\mu$.

183. El potencial vectorial originado por el momento magnético $\mu(r')\, dV'$ del elemento de volumen dV', tiene la siguiente forma:

$$dA(r) = \frac{\mu(r') \times R}{R^3} dV',$$

siendo $\mu(\mathbf{r}') = \mu_0 F(\mathbf{r}')$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, mientras que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los radio vectores del punto de observación y del punto de ubicación del elemento de volumen dV'. Según el principio de superposición para un volumen arbitrario V podemos obtener

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mu(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}\, dV' = \int_V \mu(\mathbf{r}') \times \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dV'.$$

Valiéndose de las fórmulas (S1.30) y (S1.18) transformemos la última integral a la siguiente forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 1/ \int_V \frac{c \operatorname{rot}' \mu(\mathbf{r}')}{R}\, dV' - \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mu(\mathbf{r}')}{R}\, dS'.$$

Dirijamos el volumen V hacia el infinito, ampliándolo ilimitadamente en todas las direcciones. En este caso, la integral de superficie se anula, ya que la expresión subintegral para $S \to \infty$ decrece más rápidamente que $1/r'^2$. Comparando el resultado obtenido con la fórmula general

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 1/c \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

se llega a la conclusión de que un momento magnético distribuido crea el mismo campo magnético que una corriente con densidad espacial

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = c \operatorname{rot}(\mu_0 F(\mathbf{r})).$$

184. Coloquemos el origen de las coordenadas en el vértice del ángulo recto, orientando el eje Z a lo largo de la dirección de la corriente. Entonces obtendremos

$$\text{a) } \mathbf{H} = \frac{J}{cx}\mathbf{l}_y; \quad b) \ \mathbf{H} = \frac{J}{cy}(\mathbf{l}_z - \mathbf{l}_x).$$

185. $\mathbf{H} = -\dfrac{2J}{cr}(1 + \sqrt{2})\,\mathbf{l}_y$, donde r es la distancia entre el punto de observación y el origen de las coordenadas.

186. $\mathbf{H} = \dfrac{2J}{\sqrt{3}\,cc}\,\mathbf{n}$, donde el versor $\mathbf{n}$ de la normal al plano del triángulo forma un sistema a dextrógiro con la dirección de la corriente J.

187. $\mathbf{H} = \dfrac{8a^2 J\mathbf{n}}{c(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}}$, donde el versor $\mathbf{n}$ de la normal al plano del cuadrado forma un sistema a dextrógiro con la dirección de la corriente J.

188. $\mathbf{H} = \dfrac{\pi J}{cR}\,\mathbf{n}$, donde el versor $\mathbf{n}$ de la normal al plano de la semicircunferencia forma un sistema a dextrógiro con la dirección de la corriente que fluye por el arco.

189. $\mathbf{H} = \dfrac{2\pi R^2 J\mathbf{n}}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} = \dfrac{2\mu}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$, donde el versor $\mathbf{n}$ de la normal al plano del anillo forma un sistema a dextrógiro con la dirección de la corriente J.

§ 5. Teorema sobre la circulación de la intensidad del campo magnético

190. La distribución de la corriente posee una simetría cilíndrica, por esto, es más simple utilizar el teorema sobre la circulación de la intensidad **H** del campo magnético (II.8). Como consecuencia de la simetría cilíndrica el vector **H**, en cada punto del espacio, resulta perpendicular al eje del cilindro y está orientado por la tangente a la circunferencia con centro en el eje del mismo. Las direcciones de los vectores **H** y **j** están vinculadas entre sí, como en la ley de Biot-Savart. El vector **H** depende en módulo solamente de la distancia hasta el eje del cilindro. Las afirmaciones manifestadas determinan unívocamente la forma del contorno de integración suplementario en la fórmula (II.8).

Para hallar la intensidad $\mathbf{H}_1$ del campo magnético dentro del cilindro, en un punto fijo a una distancia r de su eje, tracemos por dicho punto una circunferencia C_r de radio r, con el centro en el eje señalado, y calculemos la circulación del vector $\mathbf{H}_1$:

$$\oint_{C_r} \mathbf{H}_1\, dl = H_1 \oint_{C_r} dl = 2\pi r H_1.$$

La corriente, abarcada por la circunferencia suplementaria C_r, será:

$$\int \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \pi r^2 j.$$

Después de haber realizado estos cálculos, la correlación (II.8) se transforma en una ecuación algebraica respecto a H_1 de donde se encuentra

$$H_{1\psi} = H_1 = \frac{2\pi j r}{c}, \qquad H_{1r} = H_{1z} = 0.$$

La intensidad $\mathbf{H}_2$ del campo magnético fuera del cilindro se calcula análogamente:

$$H_{2\psi} = \frac{2\pi R^2 j}{cr}, \qquad H_{2r} = H_{2z} = 0.$$

De la simetría axial se deduce que $A_r = A_\psi = 0$, $A_z = A_z(r)$. Por esto, la correlación $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ dentro y fuera del cilindro toma la forma

$$\frac{dA_{1z}}{dr} = -\frac{2\pi j}{c} r \qquad (r \leqslant R),$$

$$\frac{dA_{2z}}{dr} = -\frac{2\pi R^2 j}{cr} \qquad (r \geqslant R).$$

Integrando estas ecuaciones teniendo en cuenta las condiciones suplementarias $A_{1z}(R) = A_{2z}(R) = 0$, obtenemos

$$A_{1z} = \frac{\pi j}{c}(R^2 - r^2), \quad A_{2z} = \frac{2\pi R^2 j}{c} \ln \frac{R}{r}.$$

191. Para $r \leqslant R$:

$$H_{1r} = H_{1z} = 0, \quad H_{1\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r j(\eta)\, \eta\, d\eta,$$

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{4\pi}{c} \int_r^R \frac{1}{\xi} \int_0^\xi j(\eta)\, \eta\, d\eta\, d\xi;$$

para $r \geqslant R$:

$$H_{2r} = H_{2z} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^R j(\eta)\, \eta\, d\eta,$$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \int_0^R j(\eta)\, \eta\, d\eta \ln \frac{R}{r}.$$

192. El valor absoluto de la fuerza que se busca se determina según la fórmula

$$F = \frac{4J^2}{3\pi c^2 R}.$$

193. $\mathbf{H}_1 = 0$ para $r < R$; $H_{2r} = H_{2z} = 0$, $H_{2\psi} = \dfrac{4\pi R i_0}{cr}$ para $r > R$.

194. $H_x = H_z = 0$, $H_y = -\dfrac{2\pi i_0 z}{c\,|\,z\,|}$.

195. $\mathbf{H}_1 = 0$ para $r \leqslant R_1$; $H_{2r} = H_{2z} = 0$, $H_{2\phi} = \dfrac{2\pi j\,(r^2 - R_1^2)}{cr}$ para $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; $H_{3r} = H_{3z} = 0$, $H_{3\phi} = \dfrac{2\pi j\,(R_2^2 - R_1^2)}{cr}$ para $r \geqslant R_2$.

196. $\mathbf{H}_1 = \dfrac{4\pi j z}{c}\,\mathbf{l}_x$ para $|\,z\,| \leqslant l$,

$\mathbf{H}_2 = \dfrac{4\pi j l z}{c\,|\,z\,|}\,\mathbf{l}_x$ para $|\,z\,| \geqslant l$.

197. $H_x = \dfrac{2J}{c}\left(\dfrac{y}{(x+l)^2 + y^2} - \dfrac{y}{(x-l)^2 + y^2}\right)$,

$H_y = \dfrac{2J}{c}\left(\dfrac{x-l}{(x-l)^2 + y^2} - \dfrac{x+l}{(x+l)^2 + y^2}\right)$,

$H_z = 0$;

$\mathbf{H} = \dfrac{4Jl}{cr^2}\left[\left(\dfrac{2x^2}{r^2} - 1\right)\mathbf{l}_y - \dfrac{2xy}{r^2}\,\mathbf{l}_x\right]$ para $r \gg l$.

198. $r = \dfrac{a}{\exp\left(\dfrac{c\Phi_0}{2aJ}\right) - 1}$.

199. El cuadro se atrae hacia la corriente rectilínea con la fuerza

$$F = \frac{2a^2 J_1 J_2}{c^2 r (r+a)}.$$

200. Para corrientes antiparalelas

$$\mathbf{H}_1 = 0 \qquad \text{para } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{4\pi i_0}{c} \mathbf{l}_x \qquad \text{para } |z| < l;$$

para corrientes paralelas

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4\pi i_0 z}{c|z|} \mathbf{l}_x \qquad \text{para } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = 0 \qquad \text{para } |z| < l.$$

201. $\mathbf{H} = 0$ para $z > 0$, $H_r = H_z = 0$ y $H_\psi = \frac{2J}{cr}$ para $z < 0$;

$$H_{1r} = H_{1z} = 0, \quad H_{1\psi} = \frac{J}{cr}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right);$$

$$H_{2r} = H_{2z} = 0,$$

$$H_{2\psi} = \mp \frac{J}{cr}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right),$$ donde el signo de arriba se toma para $z > 0$, mientras que el de abajo para $z < 0$. Aquí r y z son las coordenadas cilíndricas del punto de observación.

202. $\mathbf{H} = 0$ dentro de la esfera; $H_r = H_z = 0$ y $H_\psi = \frac{2J}{cr}$ fuera de la esfera, donde r es la distancia hasta el eje Z.

203. La circulación de la intensidad del campo magnético se anota de la siguiente manera:

$$\oint \mathbf{H}(\mathbf{r})\, d\mathbf{l} = -\frac{J}{c} \oint_L \oint_{L'} \left(d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}\, d\mathbf{l}\right), \tag{1}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Realicemos una permutación cíclica de factores en el producto mixto y examinemos la integral de la variable con tilde. Para esto, tendamos sobre el contorno de corriente L' una superficie fija S', la cual convierte el espacio circundante en una región simplemente convexa y corta el contorno cerrado L en cierto punto. Apliquemos el teorema de Stokes (S1.17) a la integral de la variable con tilde:

$$-\oint_{L'} \oint_{L} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l}\right) d\mathbf{l}' = -\int_{S'} \operatorname{rot}' \int_1^2 \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l}\right) d\mathbf{S}' =$$

$$= \int_{S'} \int_1^2 \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l}\right) d\mathbf{S}' =$$

$$= \int_{S'} \int_1^2 \left[(d\mathbf{l}\nabla)\frac{\mathbf{R}}{R^3} - d\mathbf{l} \operatorname{div} \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right] d\mathbf{S}',$$

donde con las cifras 1 y 2 están señalados el principio y el final de contorno seccionado L y además se encuentran en diferentes lados de la superficie S', teniendo un mismo punto de contacto. La integral del segundo sumando se anula, ya que

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}}{R^3}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{R}=\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

y durante la integración $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$.

La magnitud $\frac{\mathbf{R}\,dS'}{R^3}\equiv d\Omega$ representa de por sí el ángulo sólido bajo el cual se ve el área dS' desde el punto situado en el contorno L. Por consiguiente, la integral de la variable con tilde es equivalente al ángulo sólido $\Omega=\Omega(\mathbf{r})$, bajo el cual se ve, desde el punto con radio vector $\mathbf{r}$, la superficie S', tendida sobre el contorno L'. La magnitud $\Omega(\mathbf{r})$ es positiva, si la normal $\mathbf{n}'$ a la superficie S' está orientada desde el punto de observación y negativa en caso contrario. Señalemos mediante Ω_1 y Ω_2 el valor del ángulo sólido $\Omega(\mathbf{r})$ en los puntos 1 y 2. La integral a lo largo del contorno seccionado L desde el punto 1 hasta el punto 2 se calcula fácilmente:

$$\int_1^2(d\mathbf{l}\nabla)\,\Omega=\int_1^2\tau\operatorname{grad}\Omega\,dl=\int_1^2\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\,dl=\Omega_2-\Omega_1.$$

Para mayor precisión consideramos que los vectores τ y $\mathbf{n}'$ forman, en el punto de intersección del contorno L con la superficie S', un ángulo agudo. Entonces, el salto $\Omega_2-\Omega_1$ del ángulo sólido $\Omega(\mathbf{r})$ al pasar a través de la superficie S' es igual a 4π. De esta manera, la integral en la parte derecha de la igualdad (1) es equivalente a $\frac{4\pi}{c}J$.

204. Ocupemos con homogeneidad la cavidad interna de la superficie cilíndrica de radio R por dos corrientes antiparalelas con densidades espaciales $\mathbf{j}$ y $-\mathbf{j}$. Esta operación no modifica el campo magnético del sistema inicial, aunque lo reemplaza por dos cilindros continuos de radios R_1 y R_2 con corrientes antiparalelas. Acorde con el principio de superposición la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético dentro del cilindro de radio R_1 es equivalente a la suma de intensidades $\mathbf{H}=\mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$ originadas por los cilindros exterior e interior por separado, donde

$$\mathbf{H}_+=\frac{2\pi}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{r}),\qquad \mathbf{H}_-=\frac{2\pi}{c}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}).$$

Aquí, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los radio vectores que se encuentran en el plano perpendicular a los cilindros y que están trazados desde los ejes de los cilindros mencionados hasta el punto de observación. La intensidad del campo magnético total es homogénea y equivalente a:

$$\mathbf{H}=\frac{2\pi}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{l}),$$

donde $\mathbf{l}$ es el vector trazado desde el eje del cilindro exterior hacia el eje del interior $\mathbf{l}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Su módulo es igual a la distancia entre

estos ejes. El campo magnético hallado existe también dentro de la cavidad cilíndrica de radio R_1, antes de llenar ésta con corrientes antiparalelas.

205. $\mathbf{H} = \frac{2a}{cr^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{i}_0) - \frac{2\pi i_0 y}{c\,|y|}\mathbf{l}_x$, donde r es el radio vector que se encuentra en el plano XY.

206. Los cilindros se repulsan con una fuerza, referida a la unidad de su longitud, la cual en valor absoluto es igual a:

$$F = 2\left(\frac{\pi R_1}{c}\right)^2 l j_1 j_2.$$

207. $W = \left(\frac{\pi R_1}{c}\right)^2 j_1 j_2 (l^2 - R_1^2 - R_2^2)$.

§ 6. Ecuaciones de Laplace y Poisson con condiciones suplementarias

208. $j_r = j_0 = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{2\pi} r \operatorname{sen}\theta & \text{para } r \leqslant R, \\ 0 & \text{para } r > R. \end{cases}$

209. $j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{\pi} r & \text{para } r \leqslant R, \\ 0 & \text{para } r > R. \end{cases}$

210. Por la esfera de radio R fluye una corriente superficial con densidad

$$i_r = i_\theta = 0, \quad i_\psi = \frac{3ac}{4\pi} \operatorname{sen}\theta.$$

211. La función $f(r)$ tiene que satisfacer la ecuación de Laplace.

212. El potencial vectorial que se busca es de por sí una solución particular de la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0 \cos \mathbf{kr}, \tag{1}$$

la cual se anula en caso de $\mathbf{j}_0 = 0$. En vista de que no figura la condición de frontera y además que la parte derecha de la ecuación (1) es periódica en un espacio ilimitado, el potencial vectorial posee la misma estructura periódica

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos \mathbf{kr}. \tag{2}$$

Para hallar el vector constante $\mathbf{A}_0$ sustituimos en la ecuación (1) la solución buscada (2) y reducimos el factor común $\cos \mathbf{kr}$. Como resultado obtenemos

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}_0}{k^2 c} \cos \mathbf{kr}.$$

La intensidad del campo magnético se halla mediante la fórmula (II.9):

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k})}{k^2 c} \operatorname{sen} \mathbf{kr}.$$

213. $$\mathbf{A}_2 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} e^{-\lambda z} \left[\cos (k_1 x + k_2 y) + \frac{k_3}{\lambda} \operatorname{sen} (k_1 x + k_2 y) \right] \quad (z \geqslant 0),$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} \left\{ 2 \cos \mathbf{kr} + e^{\lambda z} \left[\frac{k_3}{\lambda} \operatorname{sen} (k_1 x + k_2 y) - \cos (k_1 x + k_2 y) \right] \right\} \quad (z \leqslant 0).$$

Indicación. El potencial vectorial A tiene una orientación constante determinada por el vector $\mathbf{j}_0$. La proyección del potencial vectorial sobre la dirección del vector $\mathbf{j}_0$ satisface la ecuación y condiciones suplementarias de la misma forma que el potencial del campo eléctrico en el problema 53. Esto permite emplear el procedimiento expuesto para resolver el problema señalado.

214. $$\mathbf{A} = \frac{2\pi \mathbf{i}_0}{cl} e^{-l|z|} \cos \mathbf{lr}.$$

215. $$\mathbf{A} = \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\mathbf{a}_1}{l_1} e^{-l_1|z|} \cos \mathbf{l}_1\mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}_2}{l_2} e^{-l_2|y|} \cos \mathbf{l}_2\mathbf{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{a}_3}{l_3} e^{-l_3|x|} \cos \mathbf{l}_3\mathbf{r} \right).$$

216. $$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_0 [l_2 \operatorname{sen} l_1 a - e^{-l_2 a} (l_2 \operatorname{son} l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 a] \times$$
$$\times e^{l_2 (x+a)} \operatorname{sen} l_2 y \qquad (x \leqslant -a)$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_0 [l_2 \operatorname{sen} l_1 x - e^{-l_2 a} (l_2 \operatorname{sen} l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 x] \operatorname{son} l_2 y \quad (|x| \leqslant a)$$
$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_0 [l_2 \operatorname{sen} l_1 a - e^{-l_2 a} (l_2 \operatorname{son} l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 a] \times$$
$$\times e^{-l_2 (x-a)} \operatorname{sen} l_2 y \qquad (x \geqslant a),$$

donde se ha introducido la notación $\mathbf{A}_0 = \frac{4\pi \mathbf{j}_0}{cl_2 (l_1^2 + l_2^2)}$.

Emplear el método aplicado para el problema 54. *Indicación.*

217. De las condiciones del problema se desprende que $A_r = A_\psi = 0$ y $A_z = A(r, \psi)$. La función

$$A(r, \psi) = \begin{cases} A_1 (r, \psi) & \text{para} \quad r \leqslant R, \\ A_2 (r, \psi) & \text{para} \quad r \geqslant R \end{cases}$$

satisface, dentro y fuera del cilindro, las ecuaciones

$$\nabla^2 A_1 = -\frac{4\pi}{c} j_0 r^n \cos n\psi, \quad \nabla^2 A_2 = 0 \qquad (1)$$

y las condiciones de frontera en la superficie

$$A_1 (R, \psi) = A_2 (R, \psi),$$
$$\frac{\partial A_1 (R, \psi)}{\partial r} = \frac{\partial A_2 (R, \psi)}{\partial r}.$$

Además, la función $A_1(r, \psi)$ es continua en el punto $r = 0$, mientras que el potencial vectorial aumenta fuera del cilindro no más rápido que $\ln r$. Esta última afirmación está condicionada por el hecho que la corriente total que fluye a través de la sección transversal del cilindro es nula (acorde con los resultados del problema 190 el potencial vectorial de una corriente rectilínea infinita, aumenta a grandes distancias, como $\ln r$). La ecuación y condiciones suplementarias permiten aplicar el método de soparación de variables. Ya que $\cos n\psi$ al influir la parte angular del operador de Laplace en coordenadas cilíndricas (S1.40) se reproduce $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\psi}\cos n\psi = -\frac{n^2}{r^2}\cos n\psi$ y, además de esto, la función $\cos n\psi$ es unívoca en el ejo X para $\psi \to 0$ y $\psi \to 2\pi$ la solución se busca en la forma

$$A_1 = F_1(r)\cos n\psi,$$

$$A_2 = F_2(r)\cos n\psi,$$

donde $F_1(r)$ es continua, mientras que la función $F_2(r)$ lejos del cilindro aumenta no más rápido que $\ln n$. Después de sustituir en la ecuación (1) y reducir el factor común, obtenemos

$$r^2\frac{d^2F_1}{dr^2} + r\frac{dF_1}{dr} - n^2F_1 = -\frac{4\pi}{c}j_0 r^{s+2}, \qquad (2)$$

$$r^2\frac{d^2F_2}{dr^2} + r\frac{dF_2}{dr} - n^2F_2 = 0. \qquad (3)$$

Como condiciones suplementarias para las ecuaciones (2) y (3) sirven

$$F_1(R) = F_2(R), \quad \frac{\partial F_1(R)}{\partial r} = \frac{\partial F_2(R)}{\partial r}.$$

La solución particular de la ecuación heterogénea (2) tiene la forma de

$$F_{1\,\text{part}} = \frac{4\pi j_0 r^{s+2}}{c\,[n^2-(s+2)^2]},$$

mientras que la solución de las correspondientes ecuaciones homogéneas se busca en la forma Cr^ν, donde las constantes C y ν se determinan de las mismas ecuaciones suplementarias. Omitiendo los cálculos intermediarios presentamos la respuesta definitiva

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn}\frac{R^{s+2}}{n-s-2}\left[\frac{2n}{n+s+2}\left(\frac{r}{R}\right)^{s+2} - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]\cos n\psi \qquad (r \leqslant R),$$

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn}\frac{R^{s+2}}{n+s+2}\left(\frac{R}{r}\right)^n\cos n\psi \qquad (r \geqslant R).$$

218. $$A_1 = \frac{\pi R^2 j_0}{c}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n \times \cos n\psi \qquad (r \leqslant R)$$

$$A_2 = \frac{\pi R^2 j_0}{c}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} \times \cos n\psi \qquad (r \geqslant R).$$

219. El cilindro en rotación origina en el espacio una corriente con densidad espacial

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \rho\omega r & \text{para } r \leqslant R, \\ 0 & \text{para } r > R. \end{cases}$$

Por esto, es necesario emplear el laplaciano en coordenadas cilíndricas (S1.42).

De la simetría del problema se desprende que $A_r = A_z = 0$ y $A_\psi = A\,(r)$. La función

$$A\,(r) = \begin{cases} A_1\,(r) & \text{para } r \leqslant R, \\ A_2\,(r) & \text{para } r > R \end{cases}$$

satisface, dentro y fuera del cilindro, las ecuaciones

$$r^2 \frac{d^2A_1}{dr^2} + r\frac{dA_1}{dr} - A_1 = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega r^3, \tag{1}$$

$$r^2 \frac{d^2A_2}{dr^2} + r\frac{dA_2}{dr} - A_2 = 0 \tag{2}$$

y condiciones de frontera

$$A_1\,(R) = A_2\,(R), \quad \frac{dA_1\,(R)}{dr} = \frac{dA_2\,(R)}{dr}.$$

El potencial vectorial es continuo en toda región finita del espacio, sin aumentar a gran distancia del cilindro. Esta última afirmación está relacionada con que el cilindro en revolución puede examinarse como un conjunto de corrientes anulares. Por lo tanto, el potencial vectorial de una parte aislada del cilindro decrece en el infinito, como $1/r^2$. El potencial vectorial total es equivalente a la suma infinita de aportaciones de las partes del cilindro por separado. Tal suma (o expresándose con más exactitud, integración) aumenta el valor del potencial vectorial a gran distancia del cilindro y conlleva a la ley de decrecimiento más débil $A_2 \sim 1/r$.

El método para solucionar las ecuaciones de Euler (1) y (2) se expuso en el problema 55. Definitivamente obtenemos para $r \leqslant R$:

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{\pi}{c}\rho\omega r\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right), \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\pi}{c}\rho\,(R^2 - r^2)\,\omega;$$

para $r \geqslant R$:

$$A_{2r} = A_{2z} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{\pi\rho\omega R^4}{2cr}, \quad \mathbf{H}_2 = 0.$$

220. $A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \dfrac{4\pi}{c}\displaystyle\int_r^R \frac{1}{\xi}\int_0^\xi j\,(\eta)\,\eta\,d\eta\,d\xi \quad (r \leqslant R),$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c}\int_0^R j\,(\eta)\,\eta\,d\eta \ln\frac{R}{r} \quad (r \geqslant R).$$

221. La distribución de la densidad espacial de la corriente se describe, en coordenadas esféricas, por la función

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = \begin{cases} \rho\omega r \operatorname{sen}\theta & \text{para } r \leqslant R, \\ 0 & \text{para } r > R. \end{cases}$$

A partir de la solución general (11.15) de la ecuación de Poisson y de la simetría del sistema se desprende que $A_r = A_\theta = 0$ y $A_\varphi = A(r, \theta)$. Designemos mediante A_1 y A_2 el potencial vectorial dentro y fuera de la esfera. Teniendo en cuenta el laplaciano (S1.48) en coordenadas esféricas, hallamos

$$\nabla^2 A_1 - \frac{A_1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega r \operatorname{sen}\theta, \tag{1}$$

$$\nabla^2 A_2 - \frac{A_2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = 0. \tag{2}$$

Las funciones A_1 y A_2 están limitadas en todo punto finito del espacio, además la última decrece a gran distancia de la esfera no más despacio que $1/r^2$. En la superficie de la esfera se cumplen las condiciones de frontera

$$A_1(R, \theta) = A_2(R, \theta),$$

$$\frac{\partial A_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial A_2(R, \theta)}{\partial r}.$$

El problema formulado se soluciona por el método de separación de variables. En tanto, hay que tener en cuenta que a grandes distancias de la esfera la función $A_2(r, \theta)$ coincide con el potencial vectorial del momento magnético μ de la esfera en rotación

$$A_2(r, \theta) = \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r^2} \quad \left(\mu = \frac{4\pi\rho R^5}{15c}\omega\right).$$

Por lo tanto es natural hacer la prueba de hallar la solución de las ecuaciones (1) y (2) en forma de

$$A_1 = F_1(r) \operatorname{sen}\theta, \quad A_2 = F_2(r) \operatorname{sen}\theta.$$

Introduciendo en (1) y (2) las soluciones buscadas y reduciendo el factor común, se llega a las ecuaciones de Euler

$$r^2 \frac{d^2F_1}{dr^2} + 2r\frac{dF_1}{dr} - 2F_1 = -\frac{4\pi}{c}\rho\omega r^3,$$

$$r^2 \frac{d^2F_2}{dr^2} + 2r\frac{dF_2}{dr} - 2F_2 = 0,$$

cuyas soluciones han sido descriptas en los problemas anteriores (véase, por ejemplo, el problema 55). Presentamos el resultado definitivo:

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{2\pi}{c} \rho\omega r \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \operatorname{sen} \theta,$$

$$H_{1r} = \frac{4\pi}{c} \rho\omega \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos 0, \quad H_{1\theta} = \frac{4\pi}{c} \rho\omega \left(\frac{2}{5} r^2 - \frac{R^2}{3} \right) \operatorname{sen} \theta,$$

$$H_{1\psi} = 0 \quad (r \leqslant R);$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{3(\mu r)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mu}{r^2} \quad (r \geqslant R).$$

222. Un hemisferio se aprieta al otro con la fuerza

$$F = \frac{1}{15} \left(\frac{\pi\rho\omega R^3}{c} \right)^2.$$

223. Para $r < R$:

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{2\pi R i_0}{cn} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi,$$

$$H_{1r} = -\frac{2\pi i_0}{c} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \operatorname{sen} n\psi, \quad H_{1\psi} = -\frac{2\pi i_0}{c} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \cos n\psi,$$

$$H_{1z} = 0;$$

para $r > R$:

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{2\pi R i_0}{cn} \left(\frac{R}{r} \right)^n \cos n\psi,$$

$$H_{2r} = -\frac{2\pi i_0}{c} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \operatorname{son} n\psi, \quad H_{2\psi} = \frac{2\pi i_0}{c} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \cos n\psi,$$

$$H_{2z} = 0.$$

224. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{H}_1 = 0$ para $r < R$;

$$\mathbf{A}_2 = \frac{4\pi R i_0}{c} \ln \frac{R}{r} + \mathbf{A}_0, \quad H_{2r} = H_{2z} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi R i_0}{cr} \text{ para } r > R.$$

Aquí $\mathbf{A}_0$ es un vector constante arbitrario con dimensionalidad de potencial.

225. Para $r < R$;

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{2\pi}{c} \sigma\omega R r,$$

$$H_{1r} = H_{1\psi} = 0, \quad H_{1z} = \frac{4\pi}{c} \sigma\omega R;$$

para $r > R$:

$$A_{2r} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{2\pi\sigma\omega R^3}{cr}, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \sigma v R \ln \frac{R}{r},$$

$$H_{2r} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi\sigma v R}{cr}, \quad H_{2z} = 0,$$

donde el eje Z está elegido a lo largo de la dirección del movimento, al tiempo que el sumando constante arbitrario en el potencial vectoril está omitido.

226. Para $r < R$:

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{4\pi}{3c} \sigma\omega Rr \operatorname{sen}\theta,$$

$$H_{1r} = \frac{8\pi}{3c} \sigma\omega R \cos\theta, \quad H_{1\theta} = -\frac{8\pi}{3c} \sigma\omega R \operatorname{sen}\theta,$$

$$H_{1\psi} = 0;$$

para $r > R$:

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3cr^2} \operatorname{sen}\theta,$$

$$H_{2r} = \frac{8\pi\sigma\omega R^4}{3cr^3} \cos\theta, \quad H_{2\theta} = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3cr^3} \operatorname{sen}\theta,$$

$$H_{2\psi} = 0.$$

El momento magnético de la esfera en rotación

$$\mu = \frac{4\pi}{3c} \sigma R^4 \omega.$$

El potencial vectorial e intensidad del campo magnético se expresan mediante el momento magnótico de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{R^3}, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\boldsymbol{\mu}}{R^3} \quad (r < R),$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \quad (r > R).$$

227. El potencial vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \psi)$ está orientado a lo largo del eje Z y es homogéneo en esta dirección.

La corriente en la superficie del cilindro resulta más cómodo presentarla como la suma de dos sumandos $\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b$, donde

$$\mathbf{i}_a = 1/2\,(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2),$$

$$\mathbf{i}_b = \begin{cases} 1/2\,(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2), & \text{para } 0 < \psi < \pi, \\ 1/2\,(\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_1) & \text{para } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

A estas corrientes corresponde la suma de potenciales vectoriales $\mathbf{A}_a + \mathbf{A}_b$. La magnitud $\mathbf{A}_a$ ya se halló en el problema 224:

$$\mathbf{A}_a = \begin{cases} \mathbf{A}_0 & \text{para } r \leqslant R, \\ \dfrac{2\pi R}{c}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \ln \dfrac{R}{r} + \mathbf{A}_0 & \text{para } r \geqslant R, \end{cases}$$

donde $\mathbf{A}_0$ es un vector arbitrario constante con dimensionalidad de potencial.

El potencial vectorial

$$\mathbf{A}_b(r, \psi) = \begin{cases} \mathbf{A}_{1b}(r, \psi) & (r \leqslant R), \\ \mathbf{A}_{2b}(r, \psi) & (r \geqslant R) \end{cases}$$

satisface la ecuación de Laplace y la condición de frontera en la superficie cilíndrica

$$A_{1b}(R, \psi) = A_{2b}(R, \psi),$$

$$\frac{\partial A_{1b}(R, \psi)}{\partial r} - \frac{\partial A_{2b}(R, \psi)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} i_b.$$

Además, la función A_{1b} está limitada en los puntos del eje Z, mientras que la magnitud A_{2b} se anula en el infinito: $A_{2b}(\infty, \psi) = 0$. Esta última afirmación está condicionada por el hecho de que la superficie cilíndrica con corriente i_b, a grandes distancias $r \gg R$, es equivalente al sistema de dos hilos rectilíneos con corrientes antiparalelas, cuyo potencial vectorial para $r \to \infty$ se anula. Realmente, para que la solución del probloma sea unívoca, es suficiente una exigencia más leve, basta con que la función $A_{2b}(r, \psi)$ no aumente cuando $r \to \infty$. Los cálculos sucesivos son análogos a la solución del problema 72, así que definitivamente obtenemos:

$$A = \frac{4R(i_1 - i_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \leqslant R),$$

$$A = \frac{2\pi R(i_1 + i_2)}{c} \ln \frac{R}{r} +$$

$$+ \frac{4R(i_1 - i_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \geqslant R).$$

§ 7. Energía del campo magnético

228.

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{b}{2}\left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5}\right) r \operatorname{sen}\theta,$$

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\psi = \frac{bc}{4\pi} r \operatorname{sen}\theta \quad (r \leqslant R);$$

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{bR^5}{15r^2} \operatorname{sen}\theta, \quad j = 0 \quad (r > R);$$

$$W = \frac{2b^2R^7}{315}.$$

229. $W = \dfrac{\mu^2}{R^3}$; $\mu = \dfrac{QR^2}{3c}\omega$.

230. $W = \dfrac{10\mu^2}{7R^3}$; $\mu = \dfrac{QR^2}{5c}\omega$.

231. $W = \dfrac{8\mu^2}{3R^3}$; $\mu = \dfrac{qR^2}{4c}\omega$.

232. $W = \frac{2\mu^2}{R^2}$; $\mu = \frac{\pi\sigma R^3}{c}\omega$.

233. $W = 1/n \left(\frac{\pi R i_0}{c}\right)^2$.

234. $W = 16 \left(\frac{Ri}{c}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^8}$.

235. $A_r = A_\psi = 0$, $A_z = -\frac{2J(\mathbf{rl})}{cr^2}$. El eje Z coincide con el eje de uno de los cilindros y está orientado en dirección de la corriente en éste. El radio vector r se encuentra en el plano XY, mientras que el vector l está trazado en el mismo plano desde el origen de las coordenadas hacia el eje del otro cilindro. La intensidad del campo magnético a grandes distancias de los cilindros $r \gg l$ decrece bastante rápido:

$$H_r = \frac{2Jl \operatorname{sen} \psi}{cr^2}, \quad H_\psi = -\frac{2Jl \cos \psi}{cr^2}, \quad H_z = 0,$$

donde ψ es el ángulo entre los vectores r y l. Por lo tanto la energía del campo magnético que corresponde a la unidad de longitud del sistema examinado posee valor finito.

Capítulo III CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIABLE

§ 1. Ecuaciones de Maxwell

236. No.
237. No.
238. No.
239. Sí.
240. Si al vector s se le agrega rot F, donde la función vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ es arbitraria, entonces la correlación

$$\text{div } \mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) \qquad (1)$$

no varía en correspondencia con el teorema del análisis vectorial

$$\text{div rot } \mathbf{F} \equiv 0.$$

Por consiguiente, la divergencia de la suma s + rot F también será igual a la parte derecha de la igualdad (1).

241. La intensidad E del campo eléctrico rotacional es perpendicular al vector H y no depende de las coordenadas φ y z. De la ecuación de Maxwell (III.1) se deduce que:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rE) = -\frac{r}{c}\frac{\partial H}{\partial t},$$

donde se utiliza $E_r = E_z = 0$ y $E_\varphi = E(r, t)$. La integración de la última ecuación, teniendo en cuenta la limitación de la función $E(r, t)$ para $r = 0$, nos da

$$E = -\frac{1}{cr}\int_0^r \xi \frac{\partial H(\xi, t)}{\partial t}\, d\xi.$$

Diferenciando directamente es fácil comprobar que la intensidad E del campo eléctrico rotacional hallado satisface las ecuaciones de Maxwell div E = 0 y $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}$ en las cuales la función dada H es la solución de la ecuación de onda (III.11).

242. Empleando los resultados del problema anterior, hallamos la intensidad del campo eléctrico rotacional

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

donde r es el radio vector del punto de observación, trazado desde el centro de la esfera. El momento de fuerzas aplicado a la esfera

$$\int (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{E})\, dV = -\frac{QR^2}{5c} \frac{d\mathbf{H}}{dc}.$$

La derivada respecto al tiempo del momento mecánico

$$\mathbf{M} = \frac{2}{5} mR^2 \omega$$

de la esfera es equivalente al momento de las fuerzas exteriores. Esto nos conlleva a la ecuación diferencial

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2mc} \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

cuya integración, teniendo en cuenta la condición inicial, nos da el siguiente valor de la velocidad angular:

$$\omega = -\frac{Q\mathbf{H}}{2mc}.$$

243. Valiéndose de la fórmula (S1.28) modifiquemos el segundo sumando de la expresión subintegral en la parte derecha de la igualdad

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 1/c \int \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{j} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

presentándolo de otra forma:

$$\mathbf{j} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

donde el tilde en el gradiente y la divergencia significa que la diferenciación se efectúa respecto a las coordenadas con tilde. Transformemos una de las integrales de volumen, mediante el teorema de Gauss—Ostrogradski (S1.15), en integral de superficie

$$\int\limits_{V \to \infty} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \oint\limits_{S \to \infty} \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{S}',$$

la cual, como es fácil ver, resulta ser nula.

Por medio de cálculos directos, teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (III.6), no resulta difícil convencerse de la igualdad

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \operatorname{div}' \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

donde la densidad espacial de la corriente, teniendo en cuenta el retardo, depende del tiempo

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}',\ t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right).$$

Después de esto, la divergencia del potencial vectorial retardado se escribe de la siguiente forma

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

La parte derecha de la igualdad obtenida es, con signo opuesto, equivalente a $\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Por consiguiente, los potenciales electromagnéticos retardados satisfacen la condición de Lorentz.

244. $$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$
$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho.$$

§ 2. Densidad de carga y de corriente

245. $$\rho = e\delta\left(x - l - \frac{vt}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(y - \frac{vt}{\sqrt{2}}\right)\delta(z), \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}.$$

246. $\rho = e\delta(x - a \operatorname{sen} \omega t)\,\delta(y)\,\delta(z)$, $j_x = \rho a\omega \cos \omega t$, $j_y = j_z = 0$; $\bar{\rho} = \frac{e}{\pi}\frac{\delta(y)\,\delta(z)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ para $|x| < a$, $\bar{\rho} = 0$ para $|x| > a$; $\bar{j} = 0$.

247. $\rho = \frac{e}{R}\delta(r - R)\,\delta(\psi - \omega t + 2\pi n)\,\delta(z)$, $j_r = j_z = 0$, $j_\psi = \rho R\omega$. Aquí el número entero positivo n se elige para cada momento de tiempo a partir de la condición $2\pi n \leqslant \omega t \leqslant 2(n+1)\pi$.

248. $\rho = \frac{q}{R \operatorname{sen}\theta}\delta(r - R)\,[\delta(\psi - \omega t + 2n\pi) + \delta(\psi - \omega t + 2n\pi + \pi)]$, $j_z = j_0 = 0$, $j_\psi = \rho\omega R \operatorname{sen}\theta$, donde para cada momento de tiempo fijado t el número entero positivo n se elige a partir de la condición $2n\pi \leqslant \omega t \leqslant 2(n+1)\pi$.

249. $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}\eta(R - r)$, $\mathbf{j} = \rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Aquí $\eta(\alpha)$ es una función escalonada del argumento α, la cual está definida en (S3.21).

250. $\mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}$, $\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}$, donde $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_e(t)$ es el radio vector de la carga e en movimiento.

§ 3. Momentos magnético, dipolar y cuadripolar de cargas en movimiento

251. $\mu = \frac{QR^2}{5c}\omega$; $\beta = \frac{Q}{2mc}$.

252. $\mu = \frac{m_1 m_2}{2c(m_1 + m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\mathbf{M}$.

253. En el sistema de coordenadas que se examina el impulso total de las partículas tiene que ser nulo $\mathbf{P} = 0$.

254. El elemento de la superficie del disco $dS = r\,dr\,d\theta$, ubicado en el punto con coordenadas esféricas r y θ, al girar, engendra una corriente circular

$$dJ = \frac{\sigma\omega}{2\pi}dS.$$

El momento magnético de esta corriente tiene la forma

$$d\mu = \frac{\sigma\omega}{2c} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, dS.$$

Después de la integración obtenemos

$$\mu = \frac{QR^2}{8c} \omega.$$

255. $\mu = \dfrac{5qa^3}{6c} \omega.$

256. $\mathbf{j}_n (\mathbf{r}, t) = \mu_0 \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n (t))$.

257. La trayectoria de la partícula tiene, en coordenadas polares, la siguiente forma

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \psi,$$

donde el parámetro focal p y la excentricidad ε se expresan por las fórmulas

$$p = \frac{M^2}{m \mid \alpha \mid}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{m\alpha^2}}.$$

El momento dipolar de la partícula en movimiento, en el promedio de un período T, está orientado a lo largo del eje polar. La proyección de éste sobre el eje mencionado es

$$d_x = \frac{e}{T} \int_0^T r \cos \psi \, dt = \frac{emp^3}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi \, d\psi}{(1 + \varepsilon \cos \psi)^3}. \qquad (1)$$

Al sustituir la variable de integración se ha utilizado la ecuación de la trayectoria y ley de conservación del momento, el cual nos da la vinculación entre los incrementos del tiempo y el ángulo polar

$$dt = \frac{m}{M} r^2 \, d\psi.$$

Utilicemos a continuación la integral de tabla

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\beta + \varepsilon \cos \psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon^2}}.$$

Diferenciando las dos partes de la última igualdad respecto a los parámetros β y ε con la consecutiva sustitución de $\beta = 1$ hallamos el valor de la integral en la expresión (1). Como resultado obtenemos

$$d_x = -\frac{3}{2} \varepsilon e a, \qquad (2)$$

donde a es el semieje mayor de la elipse.

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2\mathscr{E}}.$$

Para determinar el vector constante I, calculemos su valor en el punto fijo de la trayectoria con coordenadas $\psi = 0$ y $r = a(1 - \varepsilon)$. En este punto tenemos

$$\mathbf{I} = (vM + \alpha)\,\mathbf{l}_x = -2\mathscr{E}\varepsilon a\mathbf{l}_x. \qquad (3)$$

De esta manera, el vector que se retiene **I** está orientado a lo largo de eje polar X, en el cual se encuentra el semieje mayor de la trayectoria elíptica de la partícula.

Comparando las expresiones (2) y (3) hallamos definitivamente

$$\mathbf{d} = \frac{3e}{4\mathscr{E}}\,\mathbf{I}.$$

258. $\rho(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{d}\nabla)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{d}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) - \dot{\mathbf{r}}_d\,(\mathbf{d}\nabla)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d),$$

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c}\,[(\mathbf{r}_d \times \dot{\mathbf{d}}) + (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{r}}_d)].$$

Indicación. El dipolo puntual debe examinarse como el caso límite de un sistema de dos cargas e y $-e$, cuya distancia entre éstas l tiende a cero, mientras que los valores absolutos de las cargas tienden al infinito (véase, por ejemplo, la solución del problema 89). Las magnitudes buscadas se determinan mediante las fórmulas (III.5) y (III.9) en las cuales es menester pasar al límite doble $l \to 0$ y $e \to \infty$ teniendo en cuenta la correlación

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d},$$

donde el vector **l** está orientado en dirección de la carga positiva.

259. $D_{11} = -D_{22} = -3Rd \operatorname{sen} 2\omega t$, $D_{12} = 3Rd \cos \omega t$, $D_{13} = D_{23} = D_{33} = 0$.

260. $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = \dfrac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(1 + 9\varepsilon^2)$,

$$D_{22} = \frac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(1 - 6\varepsilon^2), \qquad D_{33} = -\frac{e\alpha^2}{8\mathscr{E}^2}(2 + 3\varepsilon^2),$$

donde ε es la excentricidad de la traectoria elíptica:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{m\alpha^2}}.$$

261. $E_\alpha = \dfrac{3(\mathbf{dr})\,x_\alpha - r^2 d_\alpha}{r^5} + \left(\dfrac{5}{2}\,x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\dfrac{D_{\beta\gamma}x_\gamma}{r^7}$, donde se introducen las designaciones $d_1 = -\dfrac{3}{2}\,e\varepsilon a$, $d_2 = d_3 = 0$, $D_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$, $D_{11} = \dfrac{ea^2}{2}(1 + 9\varepsilon^2)$,

$$D_{22} = \frac{ea^2}{2}(1 - 6\varepsilon^2), \qquad D_{33} = -\frac{ea^2}{2}(2 + 3\varepsilon^2),$$

$$a = \frac{e^2}{2|\mathscr{E}|}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{me^4}}.$$

Para una trayectoria circular

$$E_x = \frac{Dx}{r^7}(r^2 - 5z^2), \qquad E_y = \frac{Dy}{r^7}(r^2 - 5z^2), \qquad E_z = \frac{Dz}{r^7}(3r^2 - 5z^2),$$

donde $D = 3/4ea^2$.

Indicación. Empléense los resultados obtenidos en los problemas 257 y 260.

§ 4. Ondas electromagnéticas

262. $s = \frac{l^2}{4\pi\omega}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 \mathbf{k}, \quad w = \frac{l^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2.$

263. $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} RA_0^2 hk\mathbf{k}.$

264. $\mathbf{F} = \frac{1}{8} R^2 A_0^2 k\mathbf{k}.$

265. Elijamos la direceión del vector k en calidad de eje Z, orientando los otros ejes X e Y a lo largo de los vectores de polarización $\mathbf{l}^{(1)}$ y $\mathbf{l}^{(2)}$ de la onda lineal polarizada. Entonces

$$\sum_{\lambda=1}^{2} (\mathbf{Al}^{(\lambda)})(\mathbf{Bl}^{(\lambda)}) = A_x B_x + A_y B_y.$$

Sumemos y restemos a la parte derecha de esta igualdad la expresión $A_z B_z$. De la suma obtenida, los tres primeros sumandos constituyen un producto escalar AB, mientras que el último lo expresamos así

$$-A_z B_z = -\frac{1}{k^2}(\mathbf{Ak})(\mathbf{Bk}).$$

Como resultado, hemos representado la suma dada en forma de sumandos que contienen solamente productos escalares de vectores. Por consiguiente, ésta tendrá la misma forma en todos los sistemas de coordenadas, girados uno respecto a otro en cierto ángulo.

Para la onda circular en el sistema de coordenadas anteriormente mencionado tenemos

$$\mathbf{b}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_x + i\mathbf{l}_y) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{l}_x - i\mathbf{l}_y).$$

Los razonamientos ulteriores son análogos.

266. Escribamos las intensidades de los campos eléctricos en forma compleja. Entonces para la onda resultante obtendremos

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\{[\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}e^{i\chi}]\, e^{i(\mathbf{kr} - \omega t - \alpha_1)}\},$$

donde $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$. Introduzcamos la designación

$$\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}e^{i\chi} = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)\, e^{-i\alpha},$$

donde $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son vectores reales:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos \alpha + \mathbf{E}_{02} \cos (\alpha + \chi)$$
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{E}_{01} \cos \alpha + \mathbf{E}_{02} \operatorname{sen} (\alpha + \chi)$$

Elijamos la fase α de tal forma que se cumpla la igualdad

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = 0 \text{ o } \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{tg} \chi.$$

Para esto es menester que

$$\alpha = -\frac{\chi}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Después de lo cual los vectores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ se escribirán así:

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \cos \frac{\chi}{2},$$

$$\mathbf{b}_2 = (-\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \operatorname{sen} \frac{\chi}{2}.$$

Así pues, la onda resultante posee una polarización elíptica. Los ejes principales de la elipse de polarización están girados respecto a los vectores $\mathbf{E}_{01}$ y $\mathbf{E}_{02}$ en el ángulo $\pi/4$ en el sentido de las agujas del reloj, mirando a lo largo de la dirección de propagación de la onda. Si los vectores $\mathbf{E}_{01}$, $\mathbf{E}_{02}$ y k constituyen una terna a dextrógiro y

$$\operatorname{sen} \frac{\chi}{2} > 2, \quad \cos \frac{\chi}{2} > 0,$$

entonces la polarización de la onda resultante es derecha. En el caso general la dirección de rotación del vector E de la onda resultante depende de la orientación de los vectores $\mathbf{E}_{01}$ y $\mathbf{E}_{02}$ y de los signos de las magnitudes

$$\cos \frac{\chi}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{\chi}{2}.$$

En el sistema de coordenadas con ejes X y Z, paralelos a los vectores $\mathbf{b}_1$ y k respectivamente, las proyecciones de la intensidad del campo eléctrico de la onda resultante obtienen la siguiente forma

$$E_x = b_1 \cos \left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

$$E_y = b_2 \operatorname{sen} \left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

donde $b_1 = \sqrt{2}\, E_{01} \cos \frac{\chi}{2}$, $b_2 = \sqrt{2}\, E_{02} \operatorname{sen} \frac{\chi}{2}$.

267. La intensidad del campo eléctrico de la onda resultante es:

$$\mathbf{E} = 2E_0 \left(\mathbf{l}_x \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \mathbf{l}_y \operatorname{sen} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \times$$
$$\times \cos \left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

donde E_0 y ω son la amplitud y frecuencia de las dos ondas circulares, mientras que α_1 y α_2 son las constantes de las fases de la onda de polarización, derecha e izquierda respectivamente ($\omega = kc$). La magnitud E_0 en valor es equivalente al módulo del vector de la intensidad del campo eléctrico de cada onda circular.

268. La onda resultante está polarizada elípticamente. Los semiejes de la elipse de polarización son equivalentes a $A + B$ y $|A - B|$. La polarización de la onda es derecha, si $A > B$, e izquierda, si $A < B$.

269. La onda resultante está polarizada elípticamente. Los semiejes de la elipse de polarización b_1 y b_2 son

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}|, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{E}_{02} - \mathbf{E}_{01}|.$$

La polarización de la onda es derecha, si el vector $\mathbf{E}_{01} \times \mathbf{E}_{02}$ es paralelo al vector $\mathbf{k}$, e izquierda, si dichos vectores son antiparalelos.

270. Orientemos el eje X a lo largo del vector $\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}$ y el eje Z en la dirección de propagación de la onda. Entonces las proyecciones del vector de intensidad del campo eléctrico de la onda resultante tomarán el aspecto

$$E_x = \sqrt{2}\, E_{01} \cos\chi \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right),$$

$$E_y = \sqrt{2}\, E_{01} \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right),$$

donde está designado $\chi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z$. La elipse de polarización de la onda resultante se deforma en cada punto del espacio con el tiempo a partir de un segmento, orientado a lo largo del eje X (cuando $\chi = 0$), en una elipse con rotación derecha del vector $\mathbf{E}$ y posteriormente en una circunferencia (cuando $\chi = \pi/4$). Luego, la circunferencia se convierte en elipse con rotación derecha la cual se achata paulatinamente hasta pasar a ser un segmento (cuando $\chi = \pi/2$), orientado a lo largo del eje Y. Al seguir aumentando χ en los límites comprendidos entre $\pi/2$ y π el cuadro se repite pero con rotación izquierda del vector $\mathbf{E}$, y así sucesivamente. Cuando la elipse degenera convirtiéndose en segmento, la polarización de la onda pasa a ser lineal.

271. $\mathbf{E} = 2E_0 (\mathbf{l}_x \cos\chi + \mathbf{l}_y \operatorname{sen}\chi) \cos\Phi$,

$$\chi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

$$\Phi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

donde α_1 y α_2 son las constantes de las fases de las ondas circulares con polarización derecha e izquierda que se propagan a lo largo del eje Z. E_0 es la amplitud de estas ondas, numéricamente equivalente al módulo del vector de intensidad del campo eléctrico. La onda resultante tiene polarización lineal. Sin embargo, el vector de polariza-

ción de ésta gira lentamente en cada punto del espacio con frecuancia $|\omega_1 - \omega_2|$ cerca de la dirección de propagación.

272. $\mathbf{E} = 1E_0 \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4}\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)^2\right]$.

273. $\mathbf{E} = 1E_0 \dfrac{\operatorname{sen}\left[\Delta\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)\right]}{\omega_0\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right)} \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\mathbf{kr}}{kc}\right) + \alpha\right]$.

274. $\mathbf{E} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathbf{E}'(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c}\right) + \right.$

$$\left. + \mathbf{E}''(\omega)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c}\right)\right] d\omega .$$

donde $\mathbf{E}'(\omega)$ y $\mathbf{E}''(\omega)$ son las partes real e imaginaria de la componente de Fourier de la intensidad del campo eléctrico dada:

$$\mathbf{E}'(\omega) + i\mathbf{E}''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t')\, e^{i\omega t'}\, dt'.$$

275. $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \dfrac{2(2\pi)^3 \tau \mathbf{E}_0}{\omega^2\tau^2 + 1}\, \delta\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}\omega}{c}\right)$.

276. $\mathbf{E} = \sqrt{\pi}\, \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{4}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right)^2}$

277. $\mathbf{E}_\mathbf{k} = -i\dfrac{4\pi e \mathbf{k}}{k^2 + \varkappa^2}$.

Indicación. Desarrollar las dos partes de la igualdad $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ en la integral espacial de Fourier y obtener la vinculación entre las componentes de Fourier de las dos partes de esta igualdad $\mathbf{E}_\mathbf{k} = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}$. La componente de Fourier $\varphi_\mathbf{k}$ del potencial se halla mediante el cálculo inmediato de la integral

$$\varphi_\mathbf{k} = e\int \frac{e^{-\varkappa r}}{r}\, e^{-i\mathbf{kr}}\, dV = \frac{4\pi e}{k^2 + \varkappa^2}.$$

278. $E_r = E_\psi = 0,\ E_\theta = \dfrac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \operatorname{sen} 0}$;

$$H_r = H_\theta = 0, \qquad H_\psi = \frac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \operatorname{sen}\theta}.$$

279. Para $r < R$:

$$E_z = E_\psi = 0, \qquad E_r = \frac{2J_0}{cr}\cos(\omega t - kz),$$

$$H_r = H_z = 0, \qquad H_\psi = \frac{2J_0}{cr}\cos(\omega t - kz);$$

para $r > R$:

$$E_z = E_\psi = 0, \quad E_r = \frac{4J_0}{cr} \cos kz \cos \omega t,$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{4J_0}{cr} \operatorname{sen} kz \operatorname{sen} \omega t.$$

§ 5. Difracción

280. Situemos los ejes X e Y en el plano de la pantalla, haciendo coincidir el eje Y con la línea axial de la rendija como se muestra en la fig. 9. La línea gruesa designa la sección de esta pantalla. El campo

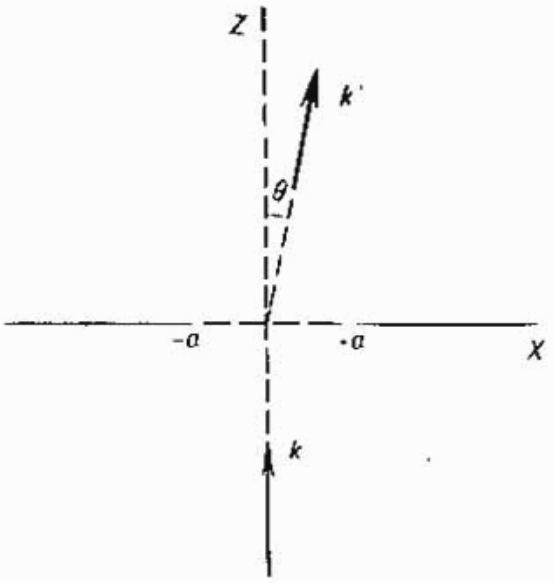


Fig. 9

difractado detrás de la pantalla $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, z, t)$ es homogéneo a lo largo del eje Y. Este satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

y la condición de frontera en el plano XY:

$$\mathbf{E}(x, 0, t) = \mathbf{l}_y E_0 g(x) \cos \omega t,$$

siendo $g(x) = 1$ para $|x| \leqslant a$ y $g(x) = 0$ para $|x| > a$. Esta condición de frontera es aproximada y se puede aplicar solamente cuando la desviación de la óptica geométrica es insignificante $ka \gg 1$.

Al principio es más cómodo resolver un problema auxiliar más simple

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mathscr{E}(x, 0, t) = \mathbf{l}_y E_0 g(x) e^{-i\omega t}.$$

Entonces la solución del problema inicial se escribirá como:

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathrm{Re}\, \mathscr{E}(x, z, t).$$

Como se ve, la solución del problema auxiliar hay que buscarla en forma de

$$\mathscr{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y E_0 f(x, z) e^{-it\omega}.$$

La función $f(x, z)$ se determina como la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0 \qquad (1)$$

con la condición de frontera

$$f(x, 0) = g(x) \qquad (2)$$

Desarrollemos en integral de Fourier la función que se busca $f(x, z)$ respecto a la variable x:

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q, z) e^{iqx} dq.$$

De la ecuación principal (1) se obtiene, para las componentes de Fourier $\psi(q, z)$ con valores fijos del parámetro q, una ecuación diferencial simple:

$$\frac{d^2\psi(q, z)}{dz^2} + (k^2 - q^2) \psi(q, z) = 0.$$

Su solución es

$$\psi(q, z) = F(q) e^{i\sqrt{k^2-q^2}\, z} + \Phi(q) e^{-i\sqrt{k^2-q^2}\, z}.$$

De esta manera, la función que se busca se divide en dos sumandos

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{i(qx + \sqrt{k^2-q^2}\, z)} dq +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q) e^{i(qx - \sqrt{k^2-q^2}\, z)} dq. \qquad (3)$$

Si se considera el factor de tiempo $e^{-i\omega t}$, entonces queda claro que el primer sumando de la suma (3) expresa la onda que se propaga desde

la rendija, y el segundo la onda en dirección contraria. Conforme a la condición del problema el segundo sumando tiene que estar ausente: $\Phi(q) \equiv 0$.

De la condición de frontera (2) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{iqx}\, dq = g(x),$$

o sea, la magnitud $F(q)$ es una componente de Fourier de la función $g(x)$. Definitivamente

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y E_0 \operatorname{Re}(f(x, z)\, e^{-i\omega t}) =$$

$$= \mathbf{l}_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{i\,(qx + \sqrt{k^2 - q^2} z - \omega t)}\, dq.$$

Los razonamientos expuestos son válidos además para un conjunto de rendijas infinitas, paralelas al eje Y. Para una rendija obtenemos

$$F(q) = \int_{-a}^{a} e^{-iqx}\, dx = 2\, \frac{\operatorname{sen} qa}{q},$$

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{sen} qa}{q} \cos(\omega t - qx -$$

$$- \sqrt{k^2 - q^2}\, z)\, dq + \mathbf{l}_y \frac{2E_0}{\pi} \int_{k}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} qa}{q}\, e^{-\sqrt{q^2 - k^2}\, z} \cos qx\, dq \cos \omega t.$$

El primer sumando de la intensidad $\mathbf{E}(z, x, t)$ del campo eléctrico representa de por sí una onda móvil que se propaga desde la pantalla, mientras que el segundo sumando es una onda estacionaria cuya amplitud difiere considerablemente de cero solamente en la proximidad de la pantalla. El segundo sumando es, según su orden de magnitud, menor que el primero en la relación $\frac{1}{ka} \ll 1$, por lo tanto tiene que despreciarse para no superar la precisión de cálculo admitida. Así pues, la onda difractada tiene la forma

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{sen} qa}{q} \cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})\, dq,$$

donde el vector de onda $\mathbf{k}' = \mathbf{l}_x q + \mathbf{l}_z \sqrt{k^2 - q^2}$ constituye un ángulo pequeño θ con la dirección de propagación de la onda incidente. Su componente, que se encuentra en el plano transversal XY, está vinculada con el ángulo de difracción θ por la relación

$$q = k \operatorname{sen} \theta \approx k\theta.$$

Examinemos una franja infinita de anchura unitaria ($-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + 1$, donde y_0 es arbitrario), situada a cierta distancia z de la pantalla. El flujo de energía electromagnética a través de la superficie de dicha franja, en el promedio de tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, se da en la expresión

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathbf{E}^2(x,\ z,\ t)}\, dx = \frac{cE_0^2}{4\pi^2} \int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{sen}^2 qa}{q^2}\, dq, \qquad (4)$$

donde la raya trazada sobre el cuadrado de la intensidad del campo eléctrico de la onda difractada significa el promedio en el transcurso del tiempo de un período de oscilación.

La magnitud I no depende de z, lo que significa que ésta coincide con el valor medio de la intensidad de la onda incidente $I_0 = cE_0^2 a/4\pi$, referida a la unidad de longitud de la rendija, si se desprecian los sumandos pequeños de orden $1/ka$.

La región eficaz de ángulos de difracción se encuentra entre los límites $-\theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_m$, donde $\theta_m \ll 1$. Consideremos que la longitud de la onda incidente es tan pequeña, que $ka\,\theta_m \gg 1$. Por lo tanto, la intensidad de la onda difractada (4), referida a la unidad de longitud, se expresa como:

$$I = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{ka\theta^2}\, d\theta.$$

De aquí hallamos la distribución angular de la intensidad de la onda difractada

$$dI = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{\pi ka\theta^2}\, d\theta.$$

Este resultado puede obtenerse también directamente a partir de las fórmulas (III.25) . . . (III.27).

281. Repitiendo los razonamientos expuestos al resolver el problema anterior, obtenemos

$$\mathbf{E}(x,\ z,\ t) = \mathbf{1}_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(q)\, e^{i\,(qx + \sqrt{k^2 - q^2}\, z - \omega t)}\, dq,$$

$$F(q) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2nb-a}^{2nb+a} e^{-iqx}\, dx = \frac{1}{iq} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-iq(2nb-a)} - e^{-iq(2nb+a)}\right) =$$

$$= 2\frac{\operatorname{sen} qa}{q} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2nqb} = 2\frac{\operatorname{sen} qa}{q} \frac{1 - e^{-i2Nqb}}{1 - e^{-i2qb}} =$$

$$= 2\frac{\operatorname{sen} qa}{q} \frac{\operatorname{sen} Nqb}{\operatorname{sen} qb} e^{-i(N-1)qb}.$$

Si omitimos los sumandos pequeños de orden $\frac{1}{ka} \ll 1$, entonces la intensidad del campo eléctrico de la onda difractada, que se propaga bajo pequeños ángulos de difracción, obtendrá la siguiente forma:

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \mathbf{l}_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-h}^{h} \frac{\operatorname{sen} qa}{q} \frac{\operatorname{sen} Nqb}{\operatorname{sen} qb} \times$$

$$\times \cos\left[\omega t - qx - \sqrt{k^2 - q^2}\, z + (N-1)\, qb\right] dq.$$

De aquí hallamos en el intervalo de ángulos $d\theta$ la intensidad de la onda difractada, referida a la unidad de longitud en el promedio de tiempo de un período de oscilación

$$dI = \frac{I_0}{\pi N} \left(\frac{\operatorname{sen} Nkb\theta}{\operatorname{sen} kb\theta} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{ka\theta^2}\, d\theta,$$

donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo y referida a la unidad de longitud, de la intensidad total de la onda electromagnética que pasa a través de todas las rendijas.

282. $dI = \frac{I_0}{\pi^2 ab} \frac{\operatorname{sen}^2(ka\theta \cos\psi) \operatorname{sen}^2(kb\theta \operatorname{sen}\psi)}{k^2\theta^4 \operatorname{sen}^2\psi \cos^2\psi}\, d\Omega$, donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo, de la intensidad total de la onda electromagnética que pasa a través del orificio rectangular, siendo θ y ψ los ángulos polar y azimutal del punto de observación.

Indicación. Apliquense las fórmulas (III.25) . . . (III.27).

283. Sustituyamos en la integral (III.25) las variables de integración $x = r\cos\varphi$ e $y = r\operatorname{sen}\varphi$, donde r y φ son las coordenadas polares en el plano de la pantalla. El origen de las coordenadas lo situamos en el centro del orificio. El ángulo φ se calcula a partir del vector $\mathbf{q}$. A continuación aprovechemos la representación integral (S6.7) para las funciones de Bessel de orden cero. Entonces

$$u_q = u_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} r\, dr\, d\varphi = 2\pi u_0 \int_0^R J_0(qr)\, r\, dr.$$

Acorde con la correlación (S6.15) tenemos

$$u_q = 2\pi u_0 R \frac{J_1(qR)}{q}.$$

Sustituyamos en la fórmula general (III.27) la componente de Fourier hallada y utilicemos (III.26). Como resultado la distribución angular de la intensidad de la onda electromagnética al difractarse en un orificio circular obtiene la forma de:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(kR\theta)}{\pi\theta^2}\, d\Omega,$$

donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo, de la intensidad total de la onda electromagnética que atraviesa dicho orificio.

284. $dI = I_0 \dfrac{[R_2 J_1(kR_2\theta) - R_1 J_1(kR_1\theta)]^2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)\theta^2}\, d\Omega$,

donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo, de la intensidad total de la onda electromagnética que pasa por el orificio.

285. La componente de Fourier de la onda difractada se expresa en forma de integral doble (III.25) en la superficie de la elipse con semiejes a y b. La sustitución de las variables de integración $x = ar\cos\varphi$ e $y = br\operatorname{sen}\varphi$ conduce a la integración en el área del círculo de radio unitario. El ángulo φ se calcula a partir del vector $\mathbf{Q} = \mathbf{l}_x aq_x = \mathbf{l}_y bq_y$. Tomando en consideración la representación integral de la función de Bessel (S6.7), hallamos

$$u_q = abu_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-iQr\cos\varphi} r\, dr\, d\varphi = 2\pi abu_0 \int_0^1 J_0(Qr)\, r\, dr.$$

Mediante la fórmula (S6.15) transformemos la expresión obtenida

$$u_q = 2\pi abu_0 \frac{J_1(Q)}{Q}.$$

Después de esto, aprovechemos las fórmulas generales (III.26) y (III.27), las cuales nos llevan al resultado buscado

$$dI = I_0 \frac{abJ_1^2(k\theta\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\operatorname{sen}^2\psi})}{\pi\theta^2(a^2\cos^2\psi + b^2\operatorname{sen}^2\psi)}\, d\Omega.$$

En esta fórmula I_0 es el valor medio, respecto al tiempo, de la intensidad total de la onda electromagnética que atraviesa el orificio elíptico, siendo θ y ψ los ángulos polar y azimutal del punto de observación.

286. $dI = I_0 \dfrac{\operatorname{sen}^2 ka\,\theta}{\pi ka\,\theta^2}\, d\theta$, donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, de la intensidad de la onda electromagnética incidente sobre la unidad de longitud de la placa.

287. $dI = I_0 \dfrac{J_1^2(kR\,\theta)}{\pi\theta^2}\, d\Omega$, donde I_0 es el valor medio, respecto al tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, de la intensidad total de la onda electromagnética absorbida por la esfera absolutamente negra.

Capítulo IV RADIACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS POR CARGAS EN MOVIMIENTO LENTO

§ 1. Radiación dipolar

288. Fijemos el origen de las coordenadas en el punto donde la partícula irrumpe en el condensador, orientando el eje X en dirección del movimiento, perpendicularmente a las armaduras. De la ecuación de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$ determinamos la aceleración de la partícula, la cual figura en la fórmula de la intensidad de radiación dipolar. Después de esto obtenemos

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}.$$

El tiempo de movimiento t_m se halla igualando la x-ésima coordenada de la partícula

$$x = \frac{eEt_m^2}{2m} + v_0 t_m \cos\alpha$$

a la distancia l entre las armaduras del condensador. La energía radiada durante el transpaso a través del condensador se expresa de la siguiente manera

$$\mathcal{E} = \frac{3e^3Ev_0}{3mc^3}\left(\sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2}} + \cos^2\alpha - \cos\alpha\right).$$

289. Admitamos que el origen de las coordenadas se ha fijado en el centro de la esfera y el movimiento tiene lugar a lo largo del eje X. Mediante la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = \frac{Qe}{R^3}x$ se determina la aceleración y se anota la intensidad de radiación como función de las coordenadas de la partícula

$$I = \frac{2Q^2e^4x^2}{3m^2c^3R^6}.$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que la influencia del campo de radiación en el movimiento de la partícula es insignificante y por lo tanto puede menospreciarse. Para calcular la energía

$$\mathcal{E} = \int_{-R}^{R} I = \frac{dx}{\dot{x}},$$

que pierde la partícula en radiación dipolar durante su transpaso a través de la esfera, utilicemos la ley de conservación de la energía:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathcal{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3}(x^2 - R^2).$$

La energía de radiación $\mathcal{E}$ resulta insignificantemente pequeña, comparada con la energía total de la partícula y por lo tanto se menosprecia. En estas condiciones la velocidad $\dot{x}$ es una función simple de las coordenadas de la partícula, por lo que la integral respecto a la variable x se calcula fácilmente

$$\mathcal{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^3R^2}\sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2R}} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{2\mathcal{E}_0R}{|Qe|}+1\right)\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|Qe|}+1}} - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0R}{|Qe|}}\right].$$

290. $\mathcal{E} = \dfrac{2\pi e^3 H v^2}{3mc^4}$.

291. $\mathcal{E} = \dfrac{2e^4H^2}{3m^2c^5}\left[v_{0x}^2 + \left(v_{0y} + \dfrac{E}{H}c\right)^2\right]t$,

donde los ejes X y Z están orientados a lo largo de los vectores **E** y **H** respectivamente.

292. $I = \dfrac{J_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}$.

293. La ecuación de movimiento del oscilador, si se toma en consideración la fuerza de rozamiento por radiación, se escribe así

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \operatorname{sen}\omega t. \qquad (1)$$

Aquí la fuerza de rozamiento por radiación es pequeña en comparación con la fuerza elástica del oscilador. Por eso, en la correspondiente ecuación homogénea es válida con gran exactitud la sustitución $\dddot{\mathbf{r}} \to -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$, la cual nos lleva a la ecuación de oscilaciones cuando hay rozamiento

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma_0\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0,$$

donde $\gamma_0 = \dfrac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$, $\gamma_0 \ll \omega_0$. Por consiguiente, la solución general de la correspondiente ecuación homogénea se atenúa con el tiempo. Las oscilaciones permanentes del oscilador se expresan mediante la solu-

ción particular de la ecuación (1) que resulta proporcional a la fuerza exterior

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\operatorname{sen}\omega t - \omega\gamma\cos\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2},$$

$$\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

El valor medio de la intensidad de radiación del oscilador respecto al tiempo de un período T es:

$$I = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

294. La aceleración del electrón se determina a partir de la ecuación de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$, lo que permite expresar la energía total de radiación de la siguiente forma

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4}. \qquad (1)$$

Para comodidad consideremos que el electrón se mueve en el plano XY y atraviesa el eje Y en el instante $t = 0$ (fig. 10). En vista de que la

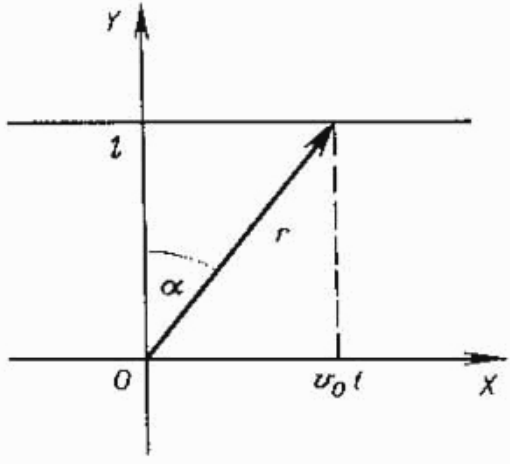


Fig. 10

trayectoria del electrón es aproximadamente rectilínea, la velocidad de éste durante el paso cerca del núcleo apenas varía $v_x = v_0$. Por esto, la integral (1) toma el aspecto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(l^2 + v_0^2 t^2)^2} = \frac{2}{v_0 l^3} \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2v_0 l^3}.$$

Y como resultado obtenemos

$$\mathscr{E} = \frac{\pi Z^2 e^6}{3m^2c^3v_0l^3}.$$

295. a) $\mathscr{E} = \dfrac{3\pi e^4 d^2}{8m^2c^3v_0l^5}$; b) $\mathscr{E} = \dfrac{7\pi e^4 d^2}{8m^2c^3v_0l^5}$.

296. La ecuación de movimiento tiene la siguiente forma $m\ddot{\mathbf{r}} = -\dfrac{3\,De\,\mathbf{r}}{4\,r^5}$, donde r es el radio vector del electrón en el plano XY. De esta ecuación se determina la aceleración que figura en la fórmula de la intensidad de radiación. Entonces, la intensidad de radiación dipolar, condicionada por la interacción del electrón con el momento cuadripolar del átomo, se escribirá así:

$$I = \frac{3D^2e^4}{8m^2c^3r^8}.$$

Supongamos que el electrón atraviesa el eje Y en el instante $t = 0$ (véase la fig. 10). La trayectoria de movimiento es aproximadamente rectilínea. Esto quiere decir que la energía cinética del electrón es considerable comparada con la potencial. Puesto que el movimiento es rápido y el electrón pasa lejos del centro de fuerza, la velocidad de éste apenas varía en módulo $v_x = v_0$ y $x = v_0t$. Esta circunstancia simplifica el cálculo de la energía total, perdida por el electrón en radiación dipolar

$$\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\,\frac{dx}{v_0} = \frac{3D^2e^4}{4m^2c^3v_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+l^2)^4} = \frac{15\pi D^2e^4}{128m^2c^3v_0l^7}.$$

297. En el sistema del centro de inercia el momento dipolar sumario de los dos fragmentos es

$$d_x = \frac{eA_1A_2}{A_1+A_2}\left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2}\right)x \equiv Q_{ef}x, \quad d_y = d_z = 0.$$

La magnitud Q_{ef} puede examinarse como la carga efectiva de la partícula con masa reducida

$$\mu = \frac{A_1A_2}{A_1+A_2}m.$$

El movimiento de la partícula con masa reducida tiene lugar a lo largo del eje X y se expresa por la ecuación

$$\mu\ddot{x} = \frac{Z_1Z_2e^2}{x^2}$$

con las condiciones suplementarias $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, donde x_0 es la distancia inicial entre los fragmentos.

La energía total de la radiación dipolar es:

$$\mathscr{E} = \frac{2Q_{ef}^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{3\mu^2 c^3} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4 \dot{x}}.$$

A partir de la ley de conservación de la energía

$$\frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} = \mathscr{E}_0$$

definimos la velocidad $\dot{x}$ como función de la coordenada x, lo que permite transformar la última integral en la forma siguiente:

$$\mathscr{E} = \frac{2Q_{ef}^2 \mathscr{E}_0^3}{3\mu^2 c^3 Z_1 Z_2 e^4} \left(\frac{\mu}{2\mathscr{E}_0}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\xi^2 \, d\xi}{(1-\xi)^{1/2}}.$$

Definitivamente la energía de radiación dipolar se escribe así:

$$\mathscr{E} = \frac{16}{45} \left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2}\right)^2 \left(\frac{2A_1A_2}{A_1+A_2}\right)^{1/2} \left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^{3/2} \frac{\mathscr{E}_0}{Z_1 Z_2}.$$

298. La intensidad I de radiación del protón es proporcional a su energía cinética

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{4e^4 H^2 \mathscr{E}}{3m^3 c^5}.$$

Esto permite escribir la ecuación diferencial para la magnitud buscada

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{4e^4 H^2}{3m^3 c^5} \mathscr{E}.$$

La solución de la última ecuación nos da la respuesta a la tarea planteada:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \exp\left(-\frac{4e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}\right).$$

299. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \exp\left(-\dfrac{2e^2\omega^2 t}{3mc^3}\right)$.

300. La desviación del movimiento circular, provocada por la pérdida de energía del electrón en radiación, durante una revolución en torno al núcleo es insignificante. Por esto, la energía del electrón, cinética y potencial, se expresa en cada instante de tiempo mediante su energía total $\mathscr{E}$. Esta circunstancia permite expresar la intensidad de radiación dipolar a través de la energía total del electrón

$$I = \frac{2e^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{Ze^2}{mr^2}\right)^2 = \frac{32\mathscr{E}^4}{3c^3 (mZe)^2}.$$

La energía del electrón que se gasta en radiación resulta:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{32\mathscr{E}^4}{3c^3(mZe)^2},$$

de donde se obtiene la ley según la cual decrece la energía total del electrón

$$\frac{1}{\mathscr{E}^3}=\frac{1}{\mathscr{E}_0^3}+\frac{32t}{(mZe)^2c^3},$$

siendo $\mathscr{E}_0=-Ze^2/2R$ el valor inicial de la energía total. El tiempo de caída del electrón sobre el centro de fuerza se obtiene lanzando la energía $\mathscr{E}$ con signo negativo hacia el infinito:

$$t_c=\frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4}.$$

301. El electrón que se encuentra dentro de la esfera cargada con homogeneidad representa de por sí un oscilador cuya frecuencia es $\omega=\frac{|e|}{R\sqrt{mR}}$. Las ondas electromagnéticas que emite son de la misma frecuencia. Si se toma en consideración la fuerza de rozamiento por radiación $\mathbf{f}=\frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}$, el movimiento oscilatorio del electrón se hace lentamente amortiguado. En este caso se cumple con gran exactitud la correlación $\dddot{\mathbf{r}}=-\omega^2\dot{\mathbf{r}}$. En correspondencia con las condiciones iniciales el movimiento del electrón es unidimensional y se caracteriza por la función

$$\ddot{x}+\dot{\gamma}x+\omega^2x=0$$

con solución en forma de

$$x=Re^{-\gamma t/2}\cos\omega t.$$

Aquí se designa por $\gamma=\frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$ ($\gamma\ll\omega$). El valor medio de la energía total del electrón, respecto al tiempo comprendido entre t y $t+2\pi/\omega$, se define por la expresión

$$\mathscr{E}=\frac{m}{2}\overline{\dot{x}^2}+\frac{m\omega^2}{2}\overline{x^2}=\frac{1}{2}m\omega^2R^2e^{-\gamma t}.$$

302. La segunda derivada respecto al tiempo del momento dipolar del sistema se expresa mediante la suma de todas las fuerzas aplicadas a las partículas. En el caso de un sistema cerrado la resultante de estas fuerzas se anula. Por esto, la intensidad de radiación dipolar es nula.

303. Al calcular las pérdidas energéticas de la unidad de volumen del gas electrónico se puede sumar no las amplitudes del campo, sino que las intensidades de radiación de los electrones por separado. Esto está relacionado con que la distancia promedia entre los electrones es comparable con el radio de la zona de onda, mientras que las

diferencias de fases de las ondas emitidas por los electrones están distribuidas caóticamente. La intensidad de radiación de un electrón aislado en un campo magnético homogéneo exterior de intensidad H se da según la fórmula

$$I(v_\perp) = \frac{2e^4H^2v_\perp^2}{3m^2c^5}, \qquad (1)$$

donde $v_\perp$ es la componente de velocidad del electrón, perpendicular al vector H. Empleando la distribución de Maxwell

$$dN(\mathbf{v}) = N_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv_x\, dv_y\, dv_z,$$

así como de las correlaciones

$$v^2 = v_\perp^2 + v_z^2, \quad dv_x\, dv_y = v_\perp\, dv_\perp\, d\psi,$$

el número de electrones en unidad de volumen con velocidades en el intervalo comprendido entre $v_\perp$ y $v_\perp + dv_\perp$ se escribe de la siguiente forma

$$dN(v_\perp) = \frac{N_0 m}{kT} e^{-\frac{mv_\perp^2}{2kT}} v_\perp\, dv_\perp,$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura del gas electrónico. Multiplicando esta magnitud por la intensidad de radiación (1) de un electrón aislado se obtiene la energía radiada por unidad de tiempo por un grupo de electrones que se encuentran en la unidad de volumen con velocidades desde $v_\perp$ hasta $v_\perp + dv_\perp$. La intensidad total I de radiación por unidad de volumen del gas electrónico se determina realizando la integración respecto a la velocidad transversal

$$I = \frac{N_0e^4H^2}{3mkTc^5}\int_0^\infty e^{-\frac{m\xi}{2kT}}\,\xi\, d\xi = \frac{4N_0e^4H^2kT}{3m^3c^5}.$$

304. $I = \dfrac{8e^4E^2\psi_0^2}{3m^2c^3}\cos^2\left(\sqrt{\dfrac{2eE}{ml}}\,t\right)$.

305. Situemos el origen de las coordenadas en el punto medio entre los dipolos, además la distancia desde los dipolos hasta el punto de observación r de la zona de onda la apuntamos así

$$r_1 = r - a\frac{\mathbf{nd}_0}{2d_0}, \quad r_2 = r + a\frac{\mathbf{nd}_0}{2d_0},$$

siendo $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ el vector unitario, orientado desde el centro del sistema hacia el punto de observación.

La intensidad del campo magnético de radiación en la zona de onda es igual a la suma de aportaciones de cada dipolo por separado:

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] + \right.$$

$$\left. + \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] \right\} =$$

$$= \frac{2\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \cos \frac{\omega a (\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{2cd_0} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

El valor medio de la intensidad de radiación en un periodo

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{c^3} \int_0^1 (1 - x^2) \cos^2 \frac{\omega a x}{2c} \, dx =$$

$$= 2d_0^2 \omega \lambda^{-3} \left[\frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{a^2} \left(\frac{\lambda}{a} \operatorname{sen} \frac{a}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \right) \right].$$

En el caso límite cuando $a \ll \lambda$ obtenemos:

$$I = \frac{4}{3} d_0^2 \omega \lambda^{-3}.$$

306. $I = \dfrac{N^2 d_0^2 \omega^4}{3c^3} \exp \left(- \dfrac{t^2}{2T_0^2} \right)$,

$$\mathscr{E} = \frac{\sqrt{2\pi} N^2 d_0^2 \omega^4 T_0}{3c^3}.$$

307. $\mathscr{E} = \dfrac{2\pi e^2 \omega}{3c^3} (\omega^2 r_0^2 + v_0^2)$, $\omega^2 = \dfrac{4\pi\rho \mid e \mid}{3m}$.

308. Empleando la ecuación de Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{Ze^2 \mathbf{r}}{r^3}$, representemos la energía $\mathscr{E}_d$, radiada en un período T, en forma de la integral

$$\mathscr{E}_d = \frac{2Z^2 e^6}{3m^2 c^3} \int_0^T \frac{dt}{r^4}.$$

Mediante la ley de conservación del momento $mr^2\dot{\psi} = M$ pasamos a la integración respecto al ángulo polar ψ, utilizando la ecuación de la trayectoria

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \psi,$$

donde el parámetro focal p y la excentricidad ε son conocidos:

$$p = \frac{M^2}{mZe^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{mZ^2 e^4}}.$$

Definitivamente obtenemos

$$\mathscr{E}_d = \frac{2\pi Z^4 e^{10} m}{3M^5 c^3}\left(3 + \frac{2\mathscr{E}M^2}{mZ^2e^4}\right).$$

309. En el sistema del centro de inercia en coordenadas relativas la ecuación de Newton y el momento dipolar del sistema se expresan:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2 \mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \equiv Q_{ef}\mathbf{r}.$$

Aquí $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida y Q_{ef} la carga efectiva. El momento total M y energía $\mathscr{E}$ del sistema se dan:

$$M = \mu l v_0, \qquad \mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

La energía $\mathscr{E}_d$ que se pierde en radiación dipolar se expresa en forma de la integral

$$\mathscr{E}_d = \frac{2Q_{ef}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu^2 c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{r^4} = \frac{4Q_{ef}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu M c^3 p^2}\int_0^{\psi_m}(1-\varepsilon\cos\psi)^2\,d\psi,$$

siendo p el parámetro focal, ε la excentricidad de la hipérbola, ψ_m el máximo ángulo de desviación del eje polar, iguales a

$$p = \frac{M^2}{\mu e_1 e_2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu l v_0^2}{e_1 e_2}\right)^2}, \quad \psi_m = \arccos\frac{1}{\varepsilon}.$$

Después de la integración obtenemos

$$\mathscr{E}_d = \frac{4(e_1e_2)^4}{3\mu^2c^3(v_0l)^5}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\psi_m - \frac{3}{2}\varepsilon\operatorname{sen}\psi_m\right].$$

310. $\mathscr{E}_d = \dfrac{4\pi e^2\alpha^2 m\mathscr{E}^2}{c^3(M^2 + 2m\alpha)^{5/2}}$.

311. $\varkappa = \dfrac{8\pi e^2}{3m^2 v_0 c^2}\displaystyle\int_0^{\infty} dl \int_{r_0}^{\infty} dr \frac{l\left(\frac{dU}{dr}\right)^2}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_0^2}}}$,

donde $r_0 = r_0(l)$ es la distancia mínima a la que se acerca al centro de fuerza la partícula que pasa con el parámetro de impacto l. La magnitud r_0 es raíz de la ecuación

$$1 - \frac{l^2}{r_0^2} - \frac{2U(r_0)}{mv_0^2} = 0.$$

§ 2. Radiación dipolar magnética y cuadripolar

312. $I = \dfrac{2\beta^4 H^4 \mu^2}{3c^3} \operatorname{sen}^2 \theta_0$.

313. $I = \dfrac{a^2 b^2 J_0^2 \omega^4}{3c^5}$.

314. $I = \dfrac{2l^2 \mu_l^2 \omega^4 \psi_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega t, \quad \omega = \dfrac{2}{l} \sqrt{\dfrac{3\mu_1 H}{m_l}}$.

315. El momento dipolar $\mathbf{d}$ del sistema cargado tiene que satisfacer la condición $\ddot{\mathbf{d}} \equiv 0$.

316. $I = \dfrac{e^4}{6m^2c^5} [E^2 v^2 - (\mathbf{Ev})^2]$.

317. $I = \dfrac{Q^2 R^4 \omega_0^6 \psi_0^2}{75c^5}$.

318. $I = \dfrac{Q^2 \omega^2}{600c} \left(\dfrac{QHR}{mc^2} \right)^4 \operatorname{sen}^2 \theta$.

319. $I = \dfrac{8}{3c} \left(\dfrac{\pi^2 J^2 R^2 H \psi_0}{mc^3} \right)^2 \cos^2 \sqrt{\dfrac{2\pi JH}{mc}}\, t$.

320. $\mathcal{E} = \sqrt{2\pi\alpha}\, \dfrac{\alpha l^4 J_0^2}{c^5}$.

321. $I = \dfrac{50a^4 e^2}{3c^5} \dot{\psi}^6 (4\ddot{\psi}^2 + \dot{\psi}\dddot{\psi})^2$.

322. En el sistema de coordenadas del centro de inercia no hay radiación dipolar magnética. En otros sistemas de coordenadas la radiación dipolar magnética existe.

323. Si el origen de las coordenadas se sitúa en el centro de inercia, entonces, después de pasar a coordenadas relativas, el momento magnético de dos partículas cargadas se expresa mediante el momento mecánico total, el cual en caso de un sistema cerrado conserva constante su valor. Por esto, la derivada respecto al tiempo del momento magnético idénticamente se anula y no hay radiación dipolar magnética.

324. El momento magnético del sistema es proporcional al mecánico. Conforme a la ecuación de movimiento la derivada respecto al tiempo del momento mecánico del sistema es igual al momento de las fuerzas exteriores. Este último es nulo, ya que el sistema es cerrado. Por consiguiente, la derivada respecto al tiempo de los momentos mecánico y magnético idénticamente se anula y no hay radiación dipolar magnética.

325. El momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ del sistema de partículas cargadas se expresa mediante el momento mecánico total $\mathbf{M}$ con ayuda de la fórmula

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}. \qquad (1)$$

La ecuación de movimiento del momento M tiene, en el campo magnético exterior, la forma

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mu \times \mathbf{H}. \qquad (2)$$

De las correlaciones (1) y (2) se desprende

$$\frac{d\mu}{dt} = -(\Omega \times \mu), \qquad \Omega = \frac{e\mathbf{H}}{2mc},$$

o sea, el vector μ gira en torno a la dirección H con una velocidad angular Ω. La rotación del vector μ conlleva a una radiación dipolar magnética con frecuencia $\Omega = \frac{eH}{2mc}$. Las intensidades de los campos magnético y eléctrico de radiación son en la zona de onda

$$\mathbf{H}_M = \frac{e^2H^2}{4m^2c^4r}(\mathbf{n} \times (\mu_\perp \times \mathbf{n})), \qquad \mathbf{E}_M = \mathbf{H}_M \times \mathbf{n},$$

siendo n el vector unitario, trazado desde el centro del sistema hacia el punto de observación, y $\mu_\perp$ la componente del momento magnético, perpendicular al vector H.

326. $I = \frac{4\mu_0^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\frac{\Delta\omega t + \alpha}{2}$.

327. El momento magnético total del sistema

$$\mu = \mu_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega + n\varepsilon)\, t =$$

$$= \mu_0 \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varepsilon t}\right) = \mu_0 \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t}\frac{1-e^{iN\varepsilon t}}{1-e^{i\varepsilon t}}\right) =$$

$$= \mu_0 \frac{\operatorname{sen}\frac{N\varepsilon t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varepsilon t}{2}} \cos\left(\omega + \frac{N-1}{2}\varepsilon\right) t.$$

El valor medio de la intensidad de radiación en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + 2\pi/\omega$ se escribe así:

$$I = \frac{\mu_0^2\omega^4}{3c^3}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{N\varepsilon t}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\varepsilon t}{2}}.$$

328. $I = \frac{N^2\mu_0^2\omega^4}{3c^3}e^{-\frac{2|t|}{\tau}}$, $\mathscr{E} = \frac{N^2\mu_0^2\omega^4\tau}{3c^3}$.

329. La intensidad de radiación cuadripolar no depende de donde se sitúe el origen de las coordenadas en caso de que se cumplan las condiciones

$$\dddot{Q} \equiv 0, \quad \dddot{\mathbf{d}} \equiv 0$$

donde Q y $\mathbf{d}$ son la carga total y el momento dipolar del sistema radiante.

330. Radiación dipolar no hay. La intensidad buscada se compone de las intensidades de las radiaciones dipolar magnética y cuadripolar del sistema de dos cargas.

Primeramente resolvemos el problema sobre las oscilaciones de la bolita, considerando que la energía radiada es insignificantemente pequeña en comparación con su energía total. Fijando el origen de las coordenadas en el punto medio de la varilla y haciendo coincidir el plano XY con el plano de las oscilaciones (el eje X es paralelo a la fuerza de gravedad), se obtiene para las coordenadas de la bolita las siguientes expresiones

$$x = l, \quad y = l\psi, \quad z = 0.$$

Aquí ψ es el ángulo de desplomo de la varilla, el cual varía acorde con la ley armónica $\psi = \psi_0 \cos \omega t$, donde $\omega = \sqrt{g/l}$, g es la aceleración de la fuerza de gravedad. Al determinar las coordenadas de la bolita se ha hecho un desarrollo en serie por el parámetro pequeño $|\psi| \ll 1$, omitiendo todos los grados superiores del ángulo ψ, excepto el primero.

Conociendo la ley de variación de las coordenadas de la bolita, encontramos la dependencia de las coordenadas de las dos cargas en función del tiempo. Después de esto, la intensidad de radiación dipolar magnética se calcula empleando la fórmula general

$$I_\mu = \frac{e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{3c^5}.$$

En la expresión para el tensor del momento cuadripolar del sistema de dos cargas deberán también omitirse los grados superiores del ángulo ψ, ya que la bolita realiza oscilaciones pequeñas:

$$D_{\alpha\beta} = 2el^2 \begin{pmatrix} 2 & 3\psi & 0 \\ 3\psi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el valor medio de la intensidad de radiación cuadripolar tomará, en el promedio de tiempo, el siguiente aspecto

$$I_D = \frac{e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{5c^5}.$$

La intensidad de radiación total de las dos cargas es igual a la suma de intensidades de las radiaciones dipolar magnética y cuadripolar

$$I = \frac{8e^2 l^4 \psi_0^2 \omega^6}{15c^5}.$$

331. $I = \dfrac{(l-l_0)^2}{15c}\left(\dfrac{em_1m_2\omega^3}{m(m_1+m_2)c^2}\right)^2 [4(l-l_0)^2+l^2]$.

332. En el sistema del centro de inercia el momento cuadripolar total de los fragmentos que se expulsan a lo largo del eje X tiene el aspecto de

$$D_{\alpha\beta} = \frac{eZA_1A_2x^2}{A(A_1+A_2)}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde x es la coordenada de la partícula con masa reducida

$$\mu = \frac{A_1A_2}{A_1+A_2}m,$$

y m la masa del nucleón. Aplicando la ecuación de Newton y la ley de conservación de la energía

$$\mu\ddot{x} = \frac{Z_1Z_2e^2}{x^2}, \quad \frac{\mu\dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1Z_2e^2}{x} = \mathcal{E}_0,$$

no resulta difícil obtener la correlación

$$\frac{d^3x^2}{dt^3} = \frac{2Z_1Z_2e^2}{\mu}\frac{\dot{x}}{x^2}.$$

Después de esto, la tarea de hallar la energía de radiación se reduce al cálculo de la integral

$$\int_{x_0}^{\infty}\frac{\dot{x}}{x^4}dx = \frac{16}{105}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2}\frac{\mathcal{E}_0^{7/2}}{Z_1^3Z_2^3e^6},$$

donde x_0 es la distancia inicial entre los fragmentos (véase también la solución del problema 297). La energía de radiación cuadripolar al expulsar los fragmentos del núcleo se expresa definitivamente mediante la fórmula

$$\mathcal{E} = \frac{64}{1575}\left(\frac{A_1+A_2}{2A_1A_2}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^{5/2}\frac{\mathcal{E}_0}{A_1A_2}.$$

333. Al calcular la tercera derivada respecto al tiempo del tensor

$$D_{\alpha\beta} = e(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})$$

del momento cuadripolar de la carga e, es necesario tener en cuenta que la aceleración del protón $\ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{e}{m}\mathbf{E}$ es constante. Por esto

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = 3e(3\dot{x}_\alpha\ddot{x}_\beta + 3\ddot{x}_\alpha\dot{x}_\beta - 2\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\delta_{\alpha\beta}).$$

La suma que se busca $\ddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\beta\alpha}$ se calcula en forma general, después de lo cual la aceleración del protón se expresa mediante $\mathbf{E}$. Como

resultado, la intensidad de radiación cuadripolar del protón se escribe así:

$$I = \frac{3e^4}{10m^2c^5}\,[(\mathbf{vE})^2 + 3v^2E^2].$$

334. $\dfrac{1}{\mathscr{E}} = \dfrac{32e^2\omega^2 t}{5m^2c^5} + \dfrac{1}{\mathscr{E}_0}$.

335. $\psi = \pi \pm 4\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,\dfrac{R\omega}{c}$,

$$I_d = \frac{4e^2R^2\omega^4}{3c^3}\,(1+\cos\psi), \quad I_D = \frac{32e^2R^4\omega^6}{5c^5}\cos^2\psi.$$

336. $I_d = \dfrac{2d^2\omega^4}{3c^3}$, $I_\mu = 0$, $I_D = \dfrac{32R^2d^2\omega^6}{5c^5}$.

Indicación. El dipolo puntual con momento d hay que examinarlo como el caso límite del sistema con dos cargas e y $-e$, la distancia entre las cuales l disminuye hasta cero, mientras que la magnitud absoluta de las cargas aumenta hasta el infinito de tal forma que

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} e\mathbf{l} = \mathbf{d}, \qquad (1)$$

donde el vector l está orientado desde la carga negativa a la positiva.

Por esto, el momento magnético engendrado por el dipolo en rotación representa de por sí el límite de la suma siguiente:

$$\mu = \lim_{\substack{l \to 0 \\ e \to \infty}} \frac{e}{2c}\left[\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right) \times \left(\dot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\mathbf{l}}}{2}\right) - \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right)\left(\dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{l}}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\,[(\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{d}})] = \frac{d}{cR}\,(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}),$$

donde r es el radio vector del dipolo en rotación.

El tensor del momento cuadripolar resulta más cómodo determinarlo primero en el sistema de coordenadas en rotación $X'Y'Z'$, donde el eje Z' coincide con el eje de giro, mientras que el eje X' pasa por el dipolo paralelamente a su momento d. Además, el dipolo se examina como un sistema de dos cargas e y $-e$, situadas una de la otra a cierta distancia fija l. Después de determinar el tensor del momento cuadripolar $D'_{\alpha\beta}$ para la magnitud fijada l en el sistema de coordenadas en rotación, es necesario realizar el paso límite (1) en cada componente de dicho tensor. Como resultado el tensor que se busca obtendrá la siguiente forma:

$$D'_{\alpha\beta} = 2Rd\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformando las coordenadas se halla el tensor del momento cuadripolar $D_{\alpha\beta}$ en el sistema de coordenadas en reposo XYZ, donde el eje Z coincide con el eje de rotación y el origen con el centro de la circunferencia:

$$D_{\alpha\beta} = 2Rd \begin{pmatrix} 3\cos^2 \omega t - 1 & 3 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t & 0 \\ 3 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t & 3 \operatorname{sen}^2 \omega t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

337. $I = \dfrac{128 R^2 d^2 \omega^6}{5c^5}$.

338. $I = \dfrac{16 a^2 d^2 \omega^6}{15 c^5}$.

339. $I_\mu = \dfrac{a^2 d_0^2 \omega^6}{3c^5}$, $I_D = \dfrac{a^2 d_0^2 \omega^6}{5c^5}$.

340. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \exp\left(-\dfrac{8e^2 a^2 \omega^4 t}{15 m c^5}\right)$.

341. No hay radiación.

342. $I = \dfrac{2Q^2 r_0^4 \omega^6 \varepsilon^2}{375 c^5} \operatorname{sen}^2 \omega t$.

343. $I = \dfrac{Q^2 R^4 \omega^6}{10 c^5}$.

344. La precesión del anillo cargado con homogeneidad conduce a la radiación cuadripolar. El tensor $D'_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del anillo se calcula fácilmente en el sistema de coordenadas con tilde $X'Y'Z'$, ligado rígidamente con el anillo en rotación (véase la fig. 4). En este caso las componentes no diagonales del tensor $D'_{\alpha\beta}$ se anulan, mientras que las diagonales obtienen la forma de:

$$D'_{11} = D'_{22} = \pi R^3 q, \quad D'_{33} = -2\pi R^3 q.$$

La matriz $a_{\alpha\beta}$ de transformación de las coordenadas $x_\alpha = a_{\alpha\beta} x'_\beta$ del sistema de coordenadas en rotación al de reposo se hallan por vía corriente:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\cos\theta \operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\theta \cos\psi & -\operatorname{sen}\theta \cos\psi \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

donde se ha introducido la designación $\psi = \omega t$. El tensor del momento cuadripolar del sistema de coordenadas en reposo se calcula empleando la fórmula general

$$D_{\alpha\beta} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} D'_{\delta\gamma} = a_{\alpha\delta} D'_{\delta\gamma} a^T_{\gamma\beta}.$$

Definitivamente la intensidad de radiación cuadripolar obtiene la forma:

$$I = \frac{\pi^2 q^2 R^6 \omega^6}{10c^5} (15 \operatorname{sen}^4 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta).$$

345. $I = \dfrac{8Q^2 l^4 \omega^6}{45c^5}$.

346. $I_\mu = \dfrac{Q^2 (a^2 + b^2)^2 \theta_0^2 \omega^6}{150c^5} \operatorname{sen}^2 \omega t$,

$$I_D = \frac{Q^2 (a^2 - b^2)^2 \theta_0^2 \omega^6}{250c^5} \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

347. El tensor del momento cuadripolar del disco:

$$D_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$D_{11} = \frac{Q}{4}(2a^2 - b^2), \quad D_{22} = \frac{Q}{4}(2b^2 - a^2), \quad D_{33} = -\frac{Q}{4}(a^2 + b^2),$$

donde $Q = \pi ab\sigma$ es la carga total. Al deformar el disco los semiejes a y b varían con el tiempo según la ley

$$a = R[1 + \varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1)], \quad b = R[1 + \varepsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2)],$$

donde las magnitudes ε_1 y ε_2 son proporcionales al parámetro pequeño β y, por lo tanto, son también pequeños $\varepsilon_1 \ll 1$ y $\varepsilon_2 \ll 1$. Conforme a los datos del problema el área del disco es equivalente a la del círculo de radio R, si se menosprecian los sumandos cuadráticos respecto al parámetro β. Este requisito conduce a la correlación que deberá cumplirse con identidad para todo t:

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \varepsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \equiv 0.$$

De esta identidad se deducen las igualdades $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2$.

Análogamente, la ley según la cual varía el parámetro de deformación nos lleva a la identidad

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \equiv \beta \cos \omega t,$$

de donde se obtiene $\varepsilon_1 = \beta$ y $\alpha_1 = 0$. De esta manera, las componentes diagonales del tensor del momento cuadripolar tienen la forma de

$$D_{11} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4}(1 + 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{22} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4}(1 - 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{33} = -\frac{\pi R^4 \sigma}{2}.$$

Retoniendo los miembros que contienen el mínimo grado del parámetro β, hallamos la intensidad de radiación en el promedio de tiempo de un período T:

$$I = \frac{\pi^2 R^8 \sigma^2 \omega^6 \beta^2}{80c^5}.$$

348. $I = \dfrac{a_0^{10} \rho^2 \omega^6 \beta^2}{540c^5}$.

349. El potencial vectorial (IV.11) en la zona de onda, tomando en consideración las correcciones de orden v_i^2/c^2, es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{6c^2 r} + \frac{1}{2c^3 r} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} e_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i)^2 \mathbf{v}_i$$

donde el radio vector $\mathbf{r}_i$ de una i-ésima carga, así como las magnitudes $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{v}_i$, se toman en el instante de tiempo $t - r/c$. Aquí se designa

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} e_i \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta,$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} e_i (3x_{i\alpha} x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

La intensidad del campo magnético de la onda emitida

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}.$$

La intensidad de radiación con la precisión dada se halla calculando el vector de Poynting a través de una esfera de gran diámetro

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^5} \int (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^{N} e_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i)^2 (\mathbf{v}_i \times \mathbf{n}) \, d\Omega.$$

El último sumando representa de por sí la magnitud que se busca, ΔI, la cual después de su integración respecto a los ángulos obtiene la forma

$$\Delta I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}}{15c^5} \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^{N} e_i [2r_i^2 \mathbf{v}_i - (\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i) \mathbf{r}_i].$$

350. En vista de que no hay radiación dipolar magnética, la intensidad de radiación de la carga e se representa, teniendo en cuenta los miembros de orden v^2/c^2, en forma de la suma de tres miembros

$$I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{180c^5} + \Delta I .$$

La magnitud, ΔI ya se determinó en el problema anterior

$$\Delta I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}}{15c^5}\frac{d^3}{dt^3}[2r^2\mathbf{v} - (\mathbf{rv})\,\mathbf{r}] =$$

$$= \frac{2e^2}{5c^5}[3v^2\dot{\mathbf{v}}^2 + (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})^2 + 2(\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{v}}^2] = \frac{4e^2E^2}{5m^2c^5}\left(2v^2 + \frac{e(\mathbf{rE})}{m}\right),$$

siendo $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{v}}$ el radio vector, velocidad y aceleración de la carga.

La intensidad de radiación cuadripolar como función de la velocidad de la carga ya se halló en el problema 333:

$$\frac{\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{180c^5} = \frac{6e^4E^2v^2}{5m^2c^5}.$$

La aceleración que figura en la fórmula de la intensidad de radiación dipolar debe calcularse tomando en consideración las correcciones relativistas de orden v^2/c^2. Para esto, hay que utilizar la ecuación de movimiento $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = e\mathbf{E}$ y las fórmulas

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}\mathscr{E}}{c^2}, \quad \mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d}{dt}\mathscr{E} = e\mathbf{vE},$$

válidas para una partícula veloz. Estas correlaciones permiten expresar la aceleración mediante la velocidad. Desarrollando la aceleración hallada en serie por el parámetro pequeño v^2/c^2 y limitándose solamente a la primera corrección relativista, obtenemos

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2E^2}{m^2}\left(1 - 3\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Adicionando los sumandos aislados, definitivamente se halla

$$I = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}\left(1 + \frac{6v^2}{5c^2} + \frac{6e(\mathbf{rE})}{5mc^2}\right). \qquad (1)$$

Sea que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$ para $t = 0$. Entonces, en un instante arbitrario de tiempo t, tenemos

$$\frac{e(\mathbf{rE})}{mc^2} = \frac{v^2}{2c^2},$$

y como resultado, la corrección obtenida para la intensidad de radiación es proporcional a v^2/c^2.

Como ya se indicó en la introducción al capítulo IV, la intensidad de radiación que aquí se examina depende de la elección del origen de las coordenadas dentro del sistema de radiación. Particularmente, en el instante cuando la partícula cargada se encuentra en el origen de las coordenadas, la intensidad de radiación hallada (4) coincide numéricamente con la intensidad de radiación de una partícula relativista (V.59), si se admite que $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ y se toma en consideración la corrección de orden v^2/c^2 (véase el problema 449). Esta circunstancia está vinculada con que en el instante dado de tiempo la magnitud (IV.46) coincide numéricamente con la intensidad de radiación (V.59) de una partícula relativista cargada, y el flujo del vector de Poynting se calcula a través de una misma esfera de gran radio en los dos casos mencionados.

§ 3. Descomposición espectral de la radiación

351. La segunda derivada del momento dipolar del electrón respecto al tiempo

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t & \text{para } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

La componente de Fourier de esta función tiene la forma de

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \left(\frac{\alpha + i(\omega + \omega_0)}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha + i(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} \right).$$

Para la energía radiada en el intervalo de frecuencias comprendidas entre ω y $\omega + d\omega$ se obtiene la siguiente expresión:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{[(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2][(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]} d\omega.$$

352. $$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2J_0^2 l^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^2}{[(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2][(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]} d\omega.$$

353. $$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\omega,$$

donde se designa $\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho |e|}{3m}$, $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$ $(\gamma \ll \omega_0)$.

354. La ecuación de movimiento del oscilador, tomando en consideración la fuerza de frenado por radiación

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t) \qquad (1)$$

está determinada para un intervalo de tiempo infinito $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$. En el intervalo $t \leqslant 0$ las partes derecha e izquierda de esta ecuación son idénticamente nulas.

Desarrollemos en integral de Fourier las dos partes de la ecuación (1) y utilicemos las correlaciones entre las componentes de Fourier

$$\ddot{\mathbf{r}}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{r}(\omega), \quad \dddot{\mathbf{r}}(\omega) = i\omega^3 \mathbf{r}(\omega).$$

La ecuación algebraica obtenida se resuelve respecto a la magnitud $\mathbf{r}(\omega)$:

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

donde $\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$, y la función $\mathbf{E}(\omega)$ se conoce:

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_0^\infty \mathbf{E}(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

Conforme a las fórmulas (IV.20) y $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -e\omega^2 \mathbf{r}(\omega)$ la energía de la radiación dipolar que corresponde al intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$, obtiene la forma

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^4}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4 |\mathbf{E}(\omega)|^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} d\omega.$$

355. $$\Delta\omega = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

356. El vector de Poynting puede expresarse en la zona de onda mediante la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^2\mathbf{n}$. La energía total que atraviesa el área unidad, situada en el punto de observación perpendicularmente a la propagación de la onda, se define por la expresión

$$\mathscr{E} = \frac{c}{4\pi}\int_0^\infty \mathbf{E}^2\, dt = \frac{c}{4\pi^2}\int_0^\infty |\mathbf{E}(\omega)|^2\, d\omega = \int_0^\infty \mathscr{E}_n(\omega)\, d\omega,$$

donde

$$\mathscr{E}_n(\omega) = \frac{cE_0^2}{16\pi^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

La magnitud $\mathscr{E}_n(\omega)$ caracteriza la composición espectral del impulso electromagnético que pasó. La representación gráfica de la función $\mathscr{E}_n(\omega)$ la da el contorno de la línea espectral. Se denomina semianchura de la línea espectral $\Delta\omega/2$ a tal valor del módulo de diferencia $|\omega - \omega_0|$, para el cual la función $\mathscr{E}_n(\omega)$ disminuye dos veces en

comparación con su valor máximo, de donde se halla para la anchura $\Delta\omega$ de la línea espectral el siguiente valor:

$$\Delta\omega = 2\alpha.$$

357. $$\Delta\omega = \frac{2}{\tau\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

358. $$\Delta\omega = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{T_0}.$$

359. $$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8e^4E^2}{3\pi m^2c^3\omega^2}\ \mathrm{sen}^2\left(\omega\sqrt{\frac{ml}{2eE}}\right)d\omega.$$

360. $$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8e^4E^2}{3\pi m^2c^3\omega^2}\ \mathrm{sen}^2\ \frac{\omega m v_0\cos\alpha}{eE}\ d\omega.$$

361. El tiempo τ de interacción entre el protón y núcleo, en orden de magnitud, es igual a l/v_0. La energía radiada en pequeñas frecuencias $\omega\tau \ll 1$ se expresa por la fórmula

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)^2}{3\pi c^3}d\omega,$$

en la cual $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades del protón antes y después de dispersarse en el núcleo. La energía radiada puede menospreciarse por ser muy pequeña en comparación con la energía total del protón. Por lo tanto, la energía cinética del protón no varía después de la dispersión. La velocidad del protón en el proceso de dispersión gira en un ángulo pequeño $\theta \ll 1$, sin cambiar en valor absoluto. Esta circunstancia permite calcular el ángulo de dispersión θ de la siguiente manera. Orientemos el eje X en dirección de la velocidad $\mathbf{v}_1$ del protón que pasa y hagamos coincidir el plano XY con el plano de dispersión. Entonces, es evidente que:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}.$$

En el caso de dispersión en ángulos pequeños se puede escribir aproximadamente $\mathrm{tg}\,\theta = \theta$ y $v_{2x} = v_2 = v_0$. La componente transversal de la velocidad después de la dispersión se halla integrando la ecuación de Newton $m\dot{v} = F_y$. Tomando en consideración el carácter rectilíneo de la trayectoria, obtenemos

$$v_{2y} = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} F_y\,dt = \frac{lZe^2}{mv_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+l^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mv_0 l}.$$

El triángulo construido sobre los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es isósceles con un ángulo pequeño θ en el vértice. Esto permite calcular el módulo de la diferencia de estas velocidades según la fórmula

$$|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2| = v_0\theta.$$

Recopilando los resultados obtenidos se puede escribir definitivamente

$$dN_\omega = \frac{d\mathcal{E}\omega}{\hbar\omega} = \frac{8}{3\pi\hbar\omega c^3}\left(\frac{Ze^3}{mv_0 l}\right)^2 d\omega.$$

362. Pasemos al sistema del centro de inercia y orientemos el eje X al encuentro de la partícula con masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ que viene desde el infinito hacia el centro del campo de repulsión coulombiano. Este movimiento se expresa por la ecuación de Newton

$$\mu\ddot{x} = \frac{e_1 e_2}{x^2}$$

con condiciones suplementarias $x(0) = l$ y $\dot{x}(0) = 0$ para $t = 0$.

En el problema sobre la radiación figura la segunda derivada del momento dipolar $\mathbf{d} = 1_x d$, que se define de la expresión

$$\ddot{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\ddot{x} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\frac{e_1 e_2}{x^2}.$$

La componente de Fourier $\ddot{d}(\omega)$ de esta función se expresa mediante la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{dt}{x^2}.$$

Para su cálculo se pasa a una nueva variable de integración la cual corrientemente se utiliza en los problemas sobre el movimiento en un campo de repulsión coulombiano

$$t = \frac{1}{\omega_0}(\xi + \operatorname{sh}\xi), \qquad x = l\operatorname{ch}^2\frac{\xi}{2},$$

donde ω_0 es la frecuencia característica

$$\omega_0 = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2e_1 e_2 (m_1 + m_2)}{l m_1 m_2}}.$$

Como resultado la componente de Fourier se escribe:

$$\ddot{d}(\omega) = \frac{4e_1 e_2}{\omega_0 l^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)F(\omega),$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi + \operatorname{sh}\xi)}\frac{d\xi}{1 + \operatorname{ch}\xi}.$$

Calculamos la última integral por partes, después de lo cual sustituimos la variable de integración $\xi = i\pi + \eta$ y utilizamos la fórmula

conocida para la derivada de la función de Hankel de primer género de orden p respecto a su argumento z:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z \operatorname{sh} \eta} \operatorname{sh} \eta \, d\eta = -i\pi H_p^{(1)'}(z).$$

Entonces la función $F(\omega)$ obtendrá la forma:

$$F(\omega) = \frac{\pi\omega}{\omega_0} e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}} H^{(1)'}_{i\frac{\omega}{\omega_0}}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

La energía radiada en forma de ondas con frecuencias en el intervalo $d\omega$ se caracteriza por la fórmula

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 |F(\omega)|^2 \, d\omega.$$

En el caso de frecuencias pequeñas $\omega \ll \omega_0$ la expresión asintótica de la función de Hankel y de su derivada se toma de la obra [9]

$$H_0^{(1)'}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{2\omega_0}{\pi\omega},$$

y la energía radiada en frecuencias pequeñas toma la forma

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{16e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega.$$

En la región de frecuencias altas $\omega \gg \omega_0$ aprovechemos la fórmula del manual [1]

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \text{ para } \nu \gg 1,$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma del argumento $z = 2/3$. Por consiguiente, la densidad espectral de radiación decrece en frecuencias altas fundamentalmente según la ley exponencial

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{9\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_2}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \times \\ \times\left[6^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2/3} e^{-\frac{2\pi\omega}{\omega_0}} d\omega.$$

363. Siguiendo el método de solución del problema anterior hallamos la composición espectral de radiación

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi lc^3(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 |f(\omega)|^2 \, d\omega,$$

donde se ha introducido la designación

$$f(\omega) = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)} \frac{d\xi}{1+\operatorname{ch}\xi}. \qquad (1)$$

Para $\omega \ll \omega_0$ la función $f(\omega)$ puede sustituirse por la unidad. La densidad espectral de radiación es en frecuencias pequeñas cuatro veces menor que en el problema anterior

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi l c^3 (m_1+m_2)} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega.$$

En la región de frecuencias altas $\omega \gg \omega_0$ la integral (1) se calcula por partes de tal manera de que los sumandos que resultan contengan en el denominador la frecuencia ω. La integral que queda se calcula otra vez por partes aumentando en el denominador de los sumandos consecuentes el exponente de ω. Continuando ilimitadamente este proceso se obtiene una serie infinita respecto al parámetro $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$. Para frecuencias altas es suficiente limitarse al primer miembro de esta serie asintótica

$$f(\omega) = i\frac{\omega_0}{4\omega}.$$

A diferencia del resultado obtenido en el problema anterior la densidad espectral de radiación decrece en altas frecuencias según la ley gradual

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e_1^2e_2^2}{3\pi l^4 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

364. Supongamos que el instante nulo de tiempo $t = 0$ responde al punto donde se detienen las partículas que chocan. Entonces, en el sistema del centro de inercia la segunda derivada del momento dipolar de las partículas cargadas es una función par del tiempo t para la colisión frontal y el alejamiento posterior. En el intervalo de tiempo $-\infty \leqslant t \leqslant 0$ (ó $0 \leqslant t \leqslant \infty$), para los casos a y b, los momentos dipolares coinciden entre sí idénticamente, así que

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(t) = \mathbf{l}G(t) \quad \text{para} \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty, \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(t) = \mathbf{l}G(t) \quad \text{para} \quad -\infty \leqslant t \leqslant 0 \quad (\text{ó } 0 \leqslant t \leqslant \infty), \tag{2}$$

donde $\mathbf{l}$ es el vector unitario constante y $G(t)$ cierta función par del tiempo t. Esta particularidad permite escribir

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = \mathbf{l}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \mathbf{l}2\int_{-\infty}^{0} G(t)\cos\omega t\, dt = \mathbf{l}2\,\mathrm{Re}\, f(\omega), \tag{3}$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = \mathbf{l}\int_{-\infty}^{0} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \mathbf{l}f(\omega), \tag{4}$$

donde $f(\omega) = \int_{-\infty}^{0} G(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$

Integrando respecto al tiempo la intensidad de radiación dipolar, teniendo en cuenta las correlaciones (1) y (2), se llega a la conclusión de que en los casos a y b las energías de radiación totales están vinculadas mediante la igualdad $\mathscr{E}^a = 2\mathscr{E}^b$. Por otra parte, las energías totales pueden representarse en forma de descomposición espectral, lo que nos da

$$\int_0^\infty |\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega)|^2\, d\omega = 2\int_0^\infty |\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega)|^2\, d\omega.$$

Esta correlación se transforma mediante las fórmulas (3) y (4) a otra forma

$$2\int_0^\infty (\mathrm{Re}\, f(\omega))^2\, d\omega = \int_0^\infty |f(\omega)|^2\, d\omega.$$

La igualdad obtenida puede demostrarse también de otra manera. Para esto examinemos aparte la integral

$$2\int_0^\infty (\mathrm{Re}\, f(\omega))^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{0} dt \int_{-\infty}^{0} dt' G(t)\, G(t') \cos\omega t \cos\omega t'.$$

Empleemos las correlaciones ya conocidas

$$2\cos\omega t \cos\omega t' = \cos\omega(t-t') + \cos\omega(t+t'),$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega\tau\, d\omega$$

y representemos esta integral así:

$$2\int_0^\infty (\mathrm{Re}\, f(\omega))^2\, d\omega = \pi\int_0^\infty G(t)\, G(t')\, [\delta(t-t') + \delta(t+t')]\, dt\, dt'.$$

El sumando de la expresión subintegral que contiene la δ-función $\delta(t+t')$ no presta ninguna aportación, por lo que la parte derecha de la última igualdad puede expresarse de la siguiente manera

$$\pi\int_0^\infty C^2(t)\, dt = \int_0^\infty |f(\omega)|^2\, d\omega.$$

365. $I = \dfrac{4\omega_0^4}{3c^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\mathbf{d}_n|^2, \quad \mathbf{d}_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{d}e^{in\omega_0 t}\, dt.$

366. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{2\mu_0^2 T^2\omega^4}{3c^3}\, e^{-\frac{\omega^2T^2}{2}}\, d\omega.$

367. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{2\pi J_0^2 S^2\tau^2}{3c^5}\, \omega^4 e^{-2\omega\tau}\, d\omega.$

Indicación. Hallar el momento magnético $\mu(t)$ de la corriente y a continuación aprovechar la correlación entre las componentes de Fourier $\ddot{\mu}(\omega) = -\omega^2\mu(\omega)$ e integral de tabla

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{para} \quad a > 0.$$

368. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{2a^2 d_0^2 \omega_0^6}{15\pi c^5} \dfrac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\, d\omega.$

369. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{4a^2 d_0^2 \omega_0^6}{15\pi c^5} \dfrac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\, d\omega.$

370. En el sistema del centro de inercia de los fragmentos del núcleo el tensor del momento cuadripolar es

$$D_{\alpha\beta} = \frac{eZA_1A_2x^2}{A(A_1+A_2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde el movimiento tiene lugar a lo largo del eje X. Mediante la ecuación de movimiento y la ley de conservación de la energía se demuestra la igualdad

$$\frac{d^3}{dt^3} x^2 = \frac{2e^2 Z_1 Z_2 (A_1+A_2)}{mA_1A_2} \frac{\dot{x}}{x^2},$$

la cual permite simplificar la fórmula para la componente de Fourier que se busca

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{2e^3 Z Z_1 Z_2}{mA} T_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dx}{x^2},$$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Realicemos la sustitución de la variable de integración

$$t = \frac{1}{\omega_0}(\xi + \operatorname{sh}\xi), \quad x = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{\mathscr{E}_0} \operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{2},$$

donde ω_0 es la frecuencia característica

$$\omega_0 = \frac{2\mathscr{E}_0}{e^2 Z_1 Z_2} \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0 (A_1+A_2)}{mA_1A_2}}.$$

Entonces se obtiene lo siguiente:

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{4eZ\mathscr{E}_0}{mA} T_{\alpha\beta} F(\omega),$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)} \frac{\operatorname{sh}\xi\, d\xi}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}.$$

La última integral la calculamos por partes, después sustituimos la variable de integración $\xi = i\pi + \eta$ y utilizamos la fórmula para la función de Hankel de primer género de orden p y argumento z

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z\operatorname{sh}\eta}\, d\eta = i\pi H_p^{(1)}(z). \qquad (1)$$

Esta transformación presenta el resultado definitivo en forma cómoda para examinar la radiación en pequeñas y grandes frecuencias

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 |F(\omega)|^2\, d\omega,$$

$$F(\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_0} e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}} H^{(1)}_{i\frac{\omega}{\omega_0}}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

En pequeñas frecuencias $\omega/\omega_0 = |p| = |z| \ll 1$ la región esencial de integración en (1) contiene $\eta \gg 1$, por esto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z\operatorname{sh}\eta} d\eta \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{\omega_0}\operatorname{sh}\eta} d\eta = H_0^{(1)}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Además, a partir de la obra [9] apuntamos

$$iH_0^{(1)}\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{2\omega_0}{\gamma\omega} \text{ para } \omega \ll \omega_0,$$

donde $\gamma = e^C = 1{,}781\ldots$, y C es la constante de Euler. De esta manera, en la región de pequeñas frecuencias $\omega \ll \omega_0$ tenemos

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{32Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\ln\frac{2\omega_0}{\gamma\omega}\right)^2 d\omega.$$

Para un argumento grande puramente imaginario la asintótica de la función de Hankel se expone en el manual [1]:

$$iH^{(1)}_{i\nu}(i\nu) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{para } \nu \gg 1,$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma del argumento $z = 1/3$. Esto permite hallar la composición espectral de radiación para grandes frecuencias $\omega \gg \omega_0$:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{45\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left[6^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{4/3} e^{-\frac{2\pi}{\omega_0}\omega}\, d\omega.$$

371. Análogamente al problema anterior la composición espectral de radiación, para los fragmentos del núcleo que se alejan, se obtiene

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 |f(\omega)|^2\, d\omega,$$

$$f(\omega) = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)}\frac{\operatorname{sh}\xi\, d\xi}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}, \qquad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\mathscr{E}_0}{e^2Z_1Z_2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0(A_1+A_2)}{mA_1A_2}}.$$

En la región de pequeñas frecuencias $\omega \ll \omega_0$ la función $f(\omega)$ puede sustituirse por el número 1/2, entonces

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2Z^2e^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0'}{mc^2}\right)^2 d\omega.$$

De aquí se ve que la densidad espectral de radiación en frecuencias pequeñas difiere sustancialmente del resultado obtenido para el problema anterior.

En el caso de frecuencias grandes $\omega \gg \omega_0$ la integral (1) deberá calcularse por partes de tal manera que los sumandos que resultan contengan en el denominador la frecuencia ω. Repitiendo este procedimiento obtendremos una serie asintótica respecto al parámetro $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$. Limitándonos al primer miembro de esta serie obtenemos

$$f(\omega) = -\frac{1}{2^4}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Por consiguiente, la densidad espectral de radiación, al alejarse los fragmentos del núcleo, decrece en frecuencias grandes $\omega \gg \omega_0$ bastante más lentamente en comparación con el problema anterior sobre la colisión frontal de los núcleos y su alojamiento posterior

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{Z^2e^2}{480\pi cA^2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 d\omega.$$

372. *Indicación.* La demostración es análoga a la solución del problema 364.

373. $d\mathscr{E}_\omega = \dfrac{8\, e^2v^2R^2}{3\,\pi c^3(R^2+h^2)}\, d\omega$. La región de aplicación de la fórmula está limitada por la condición de pequeñez de la magnitud $\hbar\omega$ en comparación con la energía cinética de la partícula, a fin de excluir los efectos cuánticos en la radiación.

374. $d\varkappa_\omega = \frac{4}{3}\frac{e^2 v^2 R^2}{c^3} d\omega$. La región de aplicación de la fórmula está limitada por la misma condición que en el problema anterior.

§ 4. Distribución angular de la radiación

375. La intensidad (IV.22) de radiación dipolar en el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ se expresa mediante la intensidad **H** del campo magnético de la onda emitida. A su vez, el vector **H** depende de la aceleración de la partícula $\ddot{\mathbf{r}}_e$ acorde con la fórmula

$$\mathbf{H} = \frac{e(\ddot{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{n})}{c^2 r},$$

donde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ y $\mathbf{r}$ es el radio vector del punto de observación. La aceleración de la partícula se determina a partir de la ecuación de Newton

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e}{mc}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) = -\frac{evH_0}{mc}\mathbf{n}',$$

donde

$$\mathbf{n}' = \mathbf{l}_x \cos\frac{eH_0 t}{mc} + \mathbf{l}_y \operatorname{sen}\frac{eH_0 t}{mc}.$$

Aquí $\mathbf{n}'$ es el vector unitario orientado a lo largo del radio vector $\mathbf{r}_e$ de la partícula. La intensidad $dI(t)$ de radiación dipolar en el ángulo sólido $d\Omega$ y momento de tiempo t

$$dI(t) = \frac{e^4 v^2 H_0^2}{4\pi m^2 c^5}[1 - (\mathbf{nn}')^2]\, d\Omega.$$

El producto escalar $\mathbf{nn}'$ se expresa mediante los ángulos polares θ y ψ del punto de observación de la siguiente manera:

$$\mathbf{nn}' = \operatorname{sen}\theta \cos\left(\frac{eH_0 t}{mc} - \psi\right).$$

Después de tomar el valor medio respecto al tiempo de un período de movimiento de la partícula, la intensidad de radiación dI en el ángulo sólido $d\Omega$ se escribe así:

$$dI = \frac{e^4 v^2 H_0^2}{8\pi m^2 c^5}(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega.$$

376. $dI = \frac{J^2 S^2 \omega^4}{8\pi c^5}(1 + \cos^2\theta)\, d\Omega$. Aquí el eje Z fue elegido a lo largo del vector ω.

377. $d\mathscr{E}_n = \frac{e^2}{15\pi R}\left(\frac{2Ze^2}{Rmc^2}\right)^{3/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\Omega$, donde el eje Z está orientado a lo largo de la trayectoria rectilínea del protón.

378. $dI = \dfrac{25}{10368} \dfrac{Q^2 R_0^4 \omega^6 e^2}{\pi c^5} \operatorname{sen}^2 20\, d\Omega$. El origen de las coordenadas está ubicado en el punto medio del cilindro, mientras que el eje Z está orientado a lo largo de su eje.

Indicación. Véase la solución del problema 347.

379. Situemos el origen del sistema de coordenadas cartesiano en reposo en el punto medio del cilindro, orientado el eje Z a lo largo del vector de la velocidad angular. El sistema de coordenadas con tilde $X'Y'Z'$ vinculado al cilindro gira en torno al eje Z' ($Z' \equiv Z$), además el X' coincide con el eje del cilindro. El tensor del momento cuadripolar del cilindro cargado se obtiene, en el sistema de coordenadas con tilde, fácilmente:

$$D'_{\alpha\beta} = D \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{Q}{4}\left(\frac{h^2}{3} - R^2\right).$$

Transformando las coordenadas determinamos el tensor $D_{\alpha\beta}$ del momento cuadripolar del cilindro en rotación. La tercera derivada de este tensor

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = -12 D\omega^3 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \operatorname{sen} 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La intensidad del campo magnético de la onda radiada en el punto de observación cuyo radio vector es r en el momento de tiempo $t' = t - r/c$ se expresa por la fórmula

$$\mathbf{H} = \frac{2D\omega^3}{c^3 r} \operatorname{sen} \theta\, (\mathbf{l} \times \mathbf{n}),$$

siendo $\mathbf{l} = \mathbf{l}_x \operatorname{sen}(2\omega t' - \psi) - \mathbf{l}_y \cos(2\omega t' - \psi)$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$. Aquí, θ y ψ son los ángulos polares del punto de observación y n el vector unitario que indica la dirección de propagación de la onda. Empleando el valor promedio de la magnitud $(\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2$ durante un período de rotación

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2\, dt' = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta),$$

encontramos la distribución angular de la intensidad de radiación

$$dI = \frac{Q^2 \omega^6}{32\pi c^5} \left(\frac{h^2}{3} - R^2\right)^2 (1 - \cos^4 \theta)\, d\Omega.$$

380. $dI = \dfrac{2e^2 l^4 \omega^6}{\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta)\, d\Omega$.

381. La energía radiada en el ángulo sólido $d\Omega$ en el intervalo de frecuencias comprendido entre ω y $\omega + d\omega$ puede representarse de la siguiente manera

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} [(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \times \mathbf{n}]^2 \, d\Omega \, d\omega,$$

donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ son las velocidades de la partícula antes y después de la colisión con la esfera. En vista de que la energía de radiación es muy pequeña comparada con la energía cinética de la partícula, la velocidad de esta última no varía en valor absoluto al chocar $v = v'$. Partiendo de razonamientos geométricos resulta fácil determinar la dependencia angular de la energía radiada

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \left(1 - \frac{l^2}{R^2}\right) \left[\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{l^2}{R^2} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \psi) + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{R} \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} \operatorname{sen} 2\theta \cos \psi \right] d\Omega \, d\omega.$$

382. $d\mathscr{E}_{n\omega} = \dfrac{D_0^2 T^2 \omega^6 \operatorname{sen}^2 2\theta}{256\pi c^5} e^{-\frac{\omega^2 T^2}{2}} \, d\Omega \, d\omega.$

383. $d\mathscr{E}_n = \dfrac{Q^2 v^3}{15\pi R c^3} \left(1 + \dfrac{5v}{8c} \cos \theta\right) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\Omega$, donde θ es el ángulo entre la velocidad $\mathbf{v}$ y la dirección hacia el punto de observación.

384. La distribución angular de la energía total de radiación se caracteriza por la fórmula (IV.26), en la cual

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r},$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{z}\mathbf{l}_z, \quad \dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} = 6e(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z}) n_z (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}).$$

En estas expresiones el eje polar Z está orientado paralelamente a la velocidad de la partícula, mientras que la coordenada z y sus derivadas respecto al tiempo tienen la forma de

$$z(t) = \frac{eE}{2m} t^2 + v_0 t \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} v_0 & \text{para } t \leqslant 0, \\ \dfrac{eE}{m} t + v_0 & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \dfrac{eE}{m} \tau + v_0 & \text{para } t \geqslant \tau, \end{cases}$$

$$\ddot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ \dfrac{eE}{m} & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{para } t > \tau, \end{cases}$$

$$\dddot{z}(t) = \frac{eE}{m} [\delta(t) - \delta(t - \tau)],$$

donde τ es el tiempo de movimiento en el campo eléctrico exterior.

Después de elevar al cuadrado la intensidad del campo magnético de radiación

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c^2 r} [\ddot{z} + 1/c\,(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z})\, n_z]\,(\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}),$$

retenemos, además del sumando dipolar, el término de interferencia que tiene un orden de v/c,

$$H^2 = \frac{e^2}{c^4 r^2}\left[\ddot{z}^2 + \frac{2}{c}\,\ddot{z}\,(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z})\, n_z\right](\mathbf{l}_z \times \mathbf{n})^2.$$

Al integrar respecto al tiempo en la fórmula (IV.26) tomemos en consideración la peculiaridad (S3.13) de la δ-función. Definitivamente

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^3 E\,(v - v_0)}{4\pi m c^3}\left(1 + \frac{5\,(v + v_0)}{2c}\cos 0\right)\operatorname{sen}^2\theta\, d\Omega,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2leE}{m}}\,.$$

385. La intensidad del campo magnético de radiación se calcula tomando en consideración el sumando pequeño, lineal respecto a la velocidad v de movimiento del protón,

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\dddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r} = \frac{e}{c^2 r}[\ddot{z} + 1/c\,(3\dot{z}\dddot{z} + z\ddddot{z})\, n_z]\,(\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}),$$

donde el eje polar está orientado a lo largo de la dirección de movimiento del protón, mientras que la coordenada z y sus derivadas respecto al tiempo tienen la forma de

$$z(t) = \frac{eE}{2m}(t + t_0)^2 - \frac{l}{2} \quad \text{para} \quad -t_0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leqslant -t_0, \\ \dfrac{eE}{m}(t + t_0) & \text{para } -t_0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \dfrac{eE}{m}\,2t_0 & \text{para } t \geqslant t_0, \end{cases}$$

$$\ddot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -t_0, \\ \dfrac{eE}{m} & \text{para } -t_0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0 & \text{para } t > t_0, \end{cases}$$

$$\dddot{z}(t) = \frac{eE}{m}[\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)].$$

El tiempo empieza a contarse desde el momento en que el protón pasa el punto medio de la trayectoria en el campo exterior, así que $2t_0$ es el tiempo de movimiento en este campo.

La componente de Fourier de la intensidad del campo magnético de radiación es

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^2 E}{mc^2 r}\left[\left(1+\frac{3v}{2c}n_z\right)\frac{2\operatorname{sen}\omega t_0}{\omega} - \frac{l}{c}n_z\cos\omega t_0 - \right.$$

$$\left. - t\,\frac{3vn_z}{c\omega^2 t_0}(\omega t_0\cos\omega t_0 - \operatorname{sen}\omega t_0)\right](\mathbf{l}_z\times\mathbf{n}).$$

Reteniendo los sumandos de orden v/c, definitivamente se obtiene

$$d\mathscr{E}_{n\omega} = \frac{e^4E^2}{2\pi^2m^2c^3}\left[\left(1+\frac{3v}{c}\cos\theta\right)\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{v\tau}{2c}\,\frac{\operatorname{sen}\omega\tau}{\omega}\cos\theta\right]\operatorname{sen}^2\theta\,d\Omega.$$

donde $\tau = 2t_0 = \sqrt{\dfrac{2ml}{eE}}$ es el tiempo de paso por el campo eléctrico exterior, y $v = \sqrt{\dfrac{2eEl}{m}}$ la velocidad del protón a la salida del mismo.

La integración de la expresión obtenida respecto a la frecuencia ω nos da la distribución angular de la energía total de radiación, teniendo en cuenta el sumando de orden v/c:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^3Ev}{4\pi mc^3}\left(1+\frac{5v}{2c}\cos\theta\right)\operatorname{sen}^2\theta\,d\Omega.$$

386. El momento magnético y el tensor del momento cuadripolar del sistema compuesto por dos dipolos se definen mediante las expresiones

$$\mu = \frac{a\dot{d}}{c}\mathbf{l}_z, \qquad D_{\alpha\beta} = 6ad\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Introduzcamos las designaciones

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{1}{6}\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta = ad_0\omega^3\operatorname{sen}\omega t\cdot N_\alpha,$$

siendo $n_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\psi$, $n_2 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi$, $n_3 = \cos\theta$, $N_1 = \operatorname{sen}\theta\times$ $\times\operatorname{sen}\psi$, $N_2 = \operatorname{sen}\theta\cos\psi$, $N_3 = 0$. Entonces, la intensidad del campo magnético de la onda radiada obtendrá, a gran distancia r de los dipolos, la forma

$$\mathbf{H} = \frac{ad_0\omega^3}{c^3r}[(\mathbf{l}_z\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + (\mathbf{N}\times\mathbf{n})]\operatorname{sen}\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

El sumando r/c tiene en cuenta el retardo de la señal electromagnética. Conociendo la magnitud H no resulta difícil calcular el flujo de energía electromagnética a través del elemento $dS = r^2\,d\Omega$ de la superficie esférica de radio r, visto desde el centro del sistema cargado

bajo el ángulo sólido $d\Omega$. Después de esto, el promedio de la intensidad de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$, en el tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$, se escribirá así:

$$dI = \frac{a^2 d_0^2 \omega^6}{2\pi c^5} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\psi\,(1 - \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\psi)\,d\Omega.$$

387. El momento magnético y el tensor del momento cuadripolar de los dipolos en rotación se determinan por el método expuesto en la indicación del problema 336

$$\mu = -\frac{R\,d\omega}{c}\,\mathbf{m}, \quad D_{\alpha\beta} = 6Rd \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\omega t \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\omega t \\ \cos\omega t & \operatorname{sen}\omega t & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{m} = \mathbf{l}_x \cos\omega t + \mathbf{l}_y \operatorname{sen}\omega t$. El origen del sistema de coordenadas cartesiano se elige en el centro de la circunferencia, mientras que el eje Z sirve de eje de rotación.

Conforme a la fórmula (IV.14) la intensidad del campo magnético en el problema dado se expresa mediante los vectores

$$\ddot{\mu} = \frac{dR\,\omega^3}{c}\,\mathbf{m}, \qquad \dddot{D} = 6R\,d\omega^3\mathbf{N},$$

$$\mathbf{N} = \cos\theta\,(\mathbf{l}_x \operatorname{son}\omega t' - \mathbf{l}_y \cos\omega t') + \mathbf{l}_z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\omega t' - \psi),$$

y las magnitudes variables se toman en el momento retardado de tiempo $t' = t - r/c$. Las designaciones introducidas permiten simplificar la expresión para la intensidad del campo magnético en la zona de onda

$$\mathbf{H} = \frac{R\,d\omega^3}{c^3 r}\,[(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{N} \times \mathbf{n})].$$

Mediando respecto al tiempo la distribución angular de la intensidad de radiación (IV.22), definitivamente hallamos

$$dI = \frac{R^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2\theta\,(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega.$$

388. $dI = \dfrac{a^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2\theta\,(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega.$

389. Situemos el origen de las coordenadas cerca de los dipolos y designemos el radio vector del dipolo extremo mediante $\mathbf{r}_0$. Entonces, la posición del m-ésimo dipolo se caracteriza por el radio vector $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_0 + m\mathbf{a}$, donde $m = 0, 1, \ldots, N - 1$. La distancia entre el m-ésimo dipolo y el punto de observación con radio vector $\mathbf{r}$ es igual a $R_m = r - \mathbf{n}\mathbf{r}_m$, donde $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$. La intensidad del campo magnético de la onda radiada

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2}{c^2 r}\,\mathbf{n} \times \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{d}\left(t - \frac{R_m}{c}\right)$$

contiene el momento dipolar del sistema considerando el retardo. La suma que aparece con el subíndice m se calcula mediante la fórmula de progresión geométrica

$$\sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{d}\left(t-\frac{R_m}{c}\right)=\mathbf{d}_0\,\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\omega t-\mathbf{kr}+\mathbf{kr}_m)}\right)=$$

$$=\mathbf{d}_0\cos\left(\omega t-\mathbf{kr}+\mathbf{kr}_0+\frac{N-1}{2}\,\mathrm{ka}\right)\frac{\operatorname{sen}\dfrac{N\mathrm{ka}}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\mathrm{ka}}{2}},$$

donde $\mathbf{k}=\dfrac{\omega}{c}\,\mathbf{n}$ es el vector de onda de la onda esférica que se dispersa. La intensidad de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ en el promedio de tiempo de un período T

$$dI=\frac{\omega^4}{8\pi c^3}\,\frac{\operatorname{sen}^2\dfrac{N\omega\mathrm{na}}{2c}}{\operatorname{sen}^2\dfrac{\omega\mathrm{na}}{2c}}\,(\mathbf{d}_0\times\mathbf{n})^2\,d\Omega.$$

390. Para los dipolos mostrados en la fig. 5, el valor medio de la intensidad de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$, en el tiempo de un período T tiene la forma de:

$$dI=\frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3}\,\frac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{5\cos\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\cos\theta}{2}\right)}\operatorname{sen}^2\theta\,d\Omega.$$

La radiación es máxima siendo el ángulo $\theta=\pi/2$ y resulta ser axial-simétrica respecto al eje Z.

En caso de que los dipolos estén situados en el eje X (véase la fig. 6) la distribución angular de la intensidad de radiación en el promedio de tiempo de un período T se caracteriza por la fórmula

$$dI=\frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3}\,\frac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{5}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\psi\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\psi\right)}\operatorname{sen}^2\theta\,d\Omega,$$

donde θ y ψ son los ángulos polares del punto de observación. La radiación es máxima en la dirección perpendicular al plano XZ.

§ 5. Polarización de las ondas radiadas

391. En la zona de onda las intensidades de los campos magnético y eléctrico de la onda radiada tienen la forma

$$\mathbf{H}=\frac{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}}{c^2 r},\qquad \mathbf{E}=\mathbf{H}\times\mathbf{n}.$$

Aquí r es la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto de observación, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ y $\ddot{\mathbf{d}}$ la segunda derivada del momento dipolar de la carga

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\omega^2 R\mathbf{n}'.$$

El vector unitario $\mathbf{n}'$ está orientado según el radio vector de la carga (fig. 11). Las componentes de los vectores unitarios $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ son:

$$n_x = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad n_y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi,$$
$$n_z = \cos\theta, \quad n'_x = \cos\omega t', \quad n'_y = \operatorname{sen}\omega t',$$
$$n'_z = 0,$$

donde $t' = t - r/c$ es el tiempo en el punto de observación, considerando el retardo, θ y ψ los ángulos polares y el eje Z está orientado

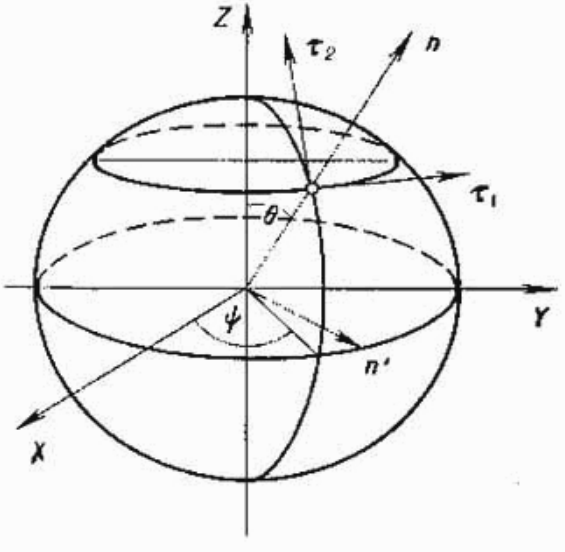


Fig. 11

a lo largo del vector ω. Introduzcamos en el plano perpendicular a la dirección $\mathbf{n}$ de propagación de la onda radiada dos versores básicos τ_1 y τ_2:

$$\tau_1 = \frac{\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \tau_2 = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n})}{\operatorname{sen}\theta}$$

Descompongamos los vectores H y E en los versores señalados:

$$\mathbf{H} = H_{\tau_1}\tau_1 + H_{\tau_2}\tau_2, \qquad \mathbf{E} = E_{\tau_1}\tau_1 + E_{\tau_2}\tau_2.$$

Las proyecciones de las intensidades de los campos sobre los versores τ_1 y τ_2 se definen por las expresiones

$$H_{\tau_1} = \mathrm{H}\tau_1 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} \cos\theta \cos(\omega t' - \psi),$$

$$H_{\tau_2} = \mathrm{H}\tau_2 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} \operatorname{sen}(\omega t' - \psi),$$

$$E_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad E_{\tau_2} = -H_{\tau_1}.$$

En cada punto de la zona de onda los vectores H y E giran, para $0 \leqslant \theta < \pi/2$, en el sentido de las agujas del reloj si se mira a lo largo de la dirección de propagación de la onda (rotación derecha). En caso de $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, la rotación es izquierda. Además, los extremos de los vectores H y E describen elipses

$$\frac{H_{\tau_1}^2}{a^2} + \frac{H_{\tau_2}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{E_{\tau_1}^2}{b^2} + \frac{E_{\tau_2}^2}{a^2} = 1,$$

con semiejes a y b equivalentes a

$$a = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} |\cos\theta|, \quad b = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}.$$

Semejante onda se denomina polarizada elípticamente con polarización derecha para $0 \leqslant \theta < \pi/2$ y polarización izquierda en la región $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. La relación entre las longitudes de los semiejes $\frac{a}{b} = |\cos\theta|$ depende de la dirección de radiación. En particular, si la onda emitida se propaga a lo largo del campo magnético $\theta = 0$ (ó $\theta = \pi$), la polarización es circular, mientras que al propagarse en ángulo recto $\theta = \pi/2$ la polarización de la onda es lineal.

392. La radiación está polarizada elípticamente con una relación entre las longitudes de los semiejes equivalente a $|\cos\theta|$, donde θ es el ángulo formado por la normal al plano de rotación del momento magnético y la dirección hacia el punto de observación. Cuando la onda radiada se propaga a lo largo del eje de rotación del momento magnético la elipse se transforma en circunferencia. La polarización de la onda es derecha para los ángulos $0 \leqslant \theta < \pi/2$, e izquierda si $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. La onda tiene una polarización lineal si se propaga formando un ángulo recto respecto al eje de rotación del momento magnético.

393. El electrón gira por una circunferencia de radio $R = \frac{mcv}{|e| H_0}$ con una frecuencia $\omega = \frac{|e| H_0}{mc}$. Orientemos el eje Z en dirección del campo magnético exterior (véase la fig. 11). La tercera derivada del tensor del momento cuadripolar respecto al tiempo es

$$\dddot{D}_{\alpha\beta} = -12e\omega^3 R^2 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \operatorname{sen} 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La intensidad del campo magnético de la onda radiada se expresa mediante el vector

$$\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\beta = 12e\omega^3R^2 \operatorname{sen}\theta \cdot l_\alpha,$$

donde para abreviar se ha designado

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_x \operatorname{sen}(2\omega t' - \psi) - \mathbf{l}_y \cos(2\omega t' - \psi).$$

Aquí $t' = t - r/c$ es el tiempo en el punto de observación, considerando el retardo, θ y ψ los ángulos polares que fijan la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ con las componentes

$$n_x = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad n_y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi,$$
$$n_z = \cos\theta.$$

En la zona de onda, a gran distancia r del centro de la circunferencia, las intensidades de los campos magnéticos y eléctricos de la onda radiada tienen la forma

$$\mathbf{H} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r} \operatorname{sen}\theta\,(\mathbf{l}\times\mathbf{n}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{H}\times\mathbf{n}.$$

Introduzcamos dos versores básicos

$$\tau_1 = \frac{\mathbf{l}_z\times\mathbf{n}}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \tau_2 = \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{l}_z\times\mathbf{n})}{\operatorname{sen}\theta},$$

que se encuentran sobre el plano perpendicular a la dirección n de propagación de la onda. La descomposición de los vectores H y E en los versores τ_1 y τ_2 lo escribimos así

$$\mathbf{H} = H_{\tau_1}\tau_1 + H_{\tau_2}\tau_2, \quad \mathbf{E} = E_{\tau_1}\tau_1 + E_{\tau_2}\tau_2,$$

donde

$$H_{\tau_1} = -\frac{2ev^2\omega}{c^3r} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}(2\omega t' - 2\psi);$$

$$H_{\tau_2} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r} \operatorname{sen}\theta\cos(2\omega t' - 2\omega);$$

$$E_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad E_{\tau_2} = -H_{\tau_1}.$$

Como se ve, el extremo del vector H (así como del E) describe una elipse cuya relación entre las longitudes de los semiejes es equivalente a $|\cos\theta|$. Por consiguiente, la radiación cuadripolar está polarizada elípticamente con polarización derecha para $0 \leqslant \theta < \pi/2$ e izquierda para los ángulos $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. En caso de que la onda se propague a lo largo del eje de rotación del electrón $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, la elipse se transforma en una circunferencia, mientras que en la dirección transversal $\theta = \pi/2$ la elipse degenera pasando a ser un segmento y entonces la polarización de la onda es lineal.

394. La radiación dipolar está polarizada linealmente.

395. La radiación dipolar magnética tiene polarización lineal.

396. La radiación cuadripolar está polarizada linealmente.

397. $dI = \dfrac{Q^2 R^4 \omega^6 \beta^2}{200\pi c^5} \operatorname{sen}^2 2\theta \, d\Omega$,

$$I = \frac{4Q^2 R^4 \omega^6 \beta^2}{375 c^5},$$

donde $Q = \dfrac{4\pi}{3} a^2 b\rho$, θ es el ángulo entre el eje de simetría axial del elipsoide de revolución y la dirección hacia el punto de observación, al mismo tiempo que la polarización de las ondas radiadas es lineal.

Indicación. Véase la solución del problema 347.

398. $dI = \dfrac{Q^2 (a^2 - b^2)^2 \omega^6}{50\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta) \, d\Omega$,

$$I = \frac{8Q^2 (a^2 - b^2)^2 \omega^6}{125 c^5}.$$

La radiación cuadripolar está polarizada elípticamente siendo la relación entre las longitudes de los semiejes equivalente a $|\cos\theta|$, donde θ es el ángulo formado por la velocidad angular ω y la dirección hacia el punto de observación. La polarización de la onda es derecha si el ángulo es agudo, e izquierda para $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. Las ondas que se propagan formando los ángulos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ son circulares, mientras que al propagarse en dirección transversal al vector de velocidad angular la polarización de la onda es lineal.

§ 6. Dispersión de las ondas electromagnéticas

399. $d\sigma = \left(\dfrac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\Omega$, donde θ es el ángulo polar del punto de observación, mientras que el eje Z está orientado en dirección del vector de polarización de la onda. La sección total de dispersión es

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

400. Si designamos el vector de polarización de la onda mediante $\mathbf{l}$, la sección eficaz de dispersión de la onda polarizada linealmente en el ángulo sólido $d\Omega$ se escribirá así:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 \, d\Omega, \qquad (1)$$

donde el vector unitario $\mathbf{n}$ está orientado hacia el punto de observación y contiene las componentes

$$n_x = \operatorname{sen}\theta \cos\psi, \quad n_y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi,$$
$$n_z = \cos\theta.$$

El eje Z lo elegimos según la dirección de propagación de la onda, designando mediante ψ' el ángulo azimutal del vector de polarización. Entonces obtenemos

$$(\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 = 1 - (\mathbf{ln})^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 (\psi - \psi').$$

Para hallar la sección eficaz de dispersión de la onda no polarizada la expresión (1) deberá mediarse respecto al ángulo ψ'. Como resultado encontramos

$$d\sigma = 1/2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta)\, d\Omega.$$

La sección total de dispersión es

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

401. $$dI = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta)\, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

Aquí θ es el ángulo entre los vectores de onda de las ondas incidente y dispersada.

402. $$d\sigma = 1/2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} (1 + \cos^2 \theta)\, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2},$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de onda de las ondas incidente y dispersada, mientras que la frecuencia atómica ω_0 se define por la expresión $\omega_0 = \sqrt{e^2/mR^3}$.

403. $$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}\, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

donde θ es el ángulo entre el vector de polarización de la onda incidente y la dirección hacia el punto de observación. Los parámetros ω_0 y γ se dan por las fórmulas

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}, \qquad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

404. $$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \operatorname{sen}^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}\, d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

donde θ es el ángulo entre el vector de polarización de la onda incidente y dirección hacia el punto de observación. Los parámetros ω_0 y γ tienen la forma de

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi\rho\,|e|}{m}}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

405. $$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\operatorname{sen}^2\psi}{b_1^2 + b_2^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,$$

donde θ y ψ son los ángulos polar y azimutal del punto de observación. El eje polar del sistema de coordenadas esférico está orientado a lo largo de la dirección de propagación de la onda incidente.

406. $\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\beta\mu\omega}{c^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta$, donde θ es el ángulo entre el vector μ y la intensidad del campo magnético de la onda incidente.

407. $$d\sigma = \frac{\beta^2\omega^4}{c^4}\left(1 - \frac{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\operatorname{sen}\psi}{b_1^2 + b_2^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\beta^2\omega^4}{c^4},$$

donde θ y ψ son los ángulos polar y azimutal del punto de observación. El eje polar del sistema de coordenadas esférico está orientado a lo largo del vector de onda de la onda incidente.

408. Primeramente determinamos la segunda derivada del momento dipolar $\mathbf{d}$ del átomo respecto al tiempo mediante la ecuación de movimiento

$$J\frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{d}\times\mathbf{E}, \tag{1}$$

así como la ecuación

$$\dot{\mathbf{d}} = \Omega\times\mathbf{d}, \tag{2}$$

que caracteriza la rotación del vector $\mathbf{d}$, el cual es invariable en valor absoluto. Diferenciando respecto del tiempo las dos partes de la ecuación (2) y valiéndose de (1) se encuentra

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{d^2}{J}\mathbf{E} - \frac{(\mathbf{dE})}{J}\mathbf{d},$$

donde los sumandos pequeños están omitidos conforme a la desigualdad $\frac{dE_0}{J} \gg \Omega^2$. La intensidad de radiación

$$I = \frac{2d^2}{3c^3J^2}\left[d^2E^2 - (\mathbf{dE})^2\right]$$

se toma en el promedio de tiempo de un período $T = 2\pi/\omega$ de oscilación de la onda incidente. Después de esto, la sección total de dispersión (IV.28) se escribirá así

$$\sigma = \frac{8\pi d^4}{3c^4 J^2}\left(1 - \frac{(\mathbf{dE}_0)^2}{d^2 E_0^2}\right).$$

Calculando el promedio de esta expresión en dirección del vector **d**, definitivamente se obtiene

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{1}{4\pi}\int \sigma\, d\Omega_{\mathbf{d}} = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

§ 7. Radiación de manantiales extendidos

409. El potencial vectorial del campo electromagnético, engendrado por la corriente dada, tiene en la zona de onda la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV', \qquad (1)$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, y el origen de las coordenadas se encuentra en el interior del sistema radiante. La distancia r hasta el punto de observación es grande comparada con la dimensión lineal máxima del volumen en el que circula la corriente.

La intensidad del campo magnético de la corriente mencionada es en la zona de onda

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}.$$

La integral que se busca se expresa mediante la diferencia de valores del potencial vectorial, tomados para $t = \infty$ y $t = -\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\, dt = \frac{1}{c}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, \infty) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, -\infty)] \times \mathbf{n}.$$

Para cada punto de observación fijo con radio vector **r** la magnitud del tiempo de retardo $\frac{1}{c}(r - \mathbf{nr}')$ adopta valores finitos, ya que la región de integración en la integral (1) está limitada. Por esto, la magnitud $t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}$ tiende hacia $\pm\infty$, cuando el tiempo t tiende al infinito $t \to \pm\infty$. De aquí se desprende que en el caso de que no haya corriente en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 la función subintegral en la integral (1) se anula idénticamente al sustituir $t = \infty$ ó $t = -\infty$.

En el caso de que la densidad espacial **j** de la corriente mencionada sea constante fuera del intervalo de tiempo (t_1, t_2) las funciones vec-

toriales $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty)$ y $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty)$ satisfacen la condición de las líneas de corriente corradas,

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty)\, dV' = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty)\, dV' = 0,$$

que fue definida anteriormente al resolver el problema 144.

Por consiguiente, en las condiciones de este problema tenemos para la zona de onda $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \infty) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, -\infty) = 0$, de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\, dt = 0. \qquad (2)$$

Para la onda con polarización lineal $\mathbf{H} = \mathbf{l}H(\mathbf{r}, t)$ la integral $\int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}, t)\, dt$ representa de por sí el área en el plano de las variables H y t, la cual denominaremos área del impulso electromagnético radiado. Conforme el resultado obtenido (2) en cada punto de observación de la zona de onda el área del impulso electromagnético radiado es igual a cero.

Si el vector $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ en el punto de observación $\mathbf{r}$ con el tiempo gira en el plano perpendicular a la dirección $\mathbf{n}$ de propagación de la onda, las áreas $\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\mathbf{r}, t)\, dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} H_2(\mathbf{r}, t)\, dt$ se anulan. Aquí $H_1 = \mathbf{l}_1\mathbf{H}$ y $H_2 = \mathbf{l}_2\mathbf{H}$, al mismo tiempo que los vectores unitarios $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ y $\mathbf{n}$ forman una terna a dextrógiro. Los razonamientos para las intensidades de los campos eléctricos son análogos.

410. A gran distancia de la corriente $r \gg kl^2$ se cumple aproximadamente la igualdad $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{nr}'$, y el potencial vectorial (IV.8) toma la forma

$$\mathbf{A} = \frac{J_0 \mathbf{l}_z}{cr} \int_{-l}^{l} \cos kz' \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + kz' \cos 0\right] dz' =$$

$$= \frac{J_0 \mathbf{l}_z}{\omega r}\left(\frac{\operatorname{sen}[kl(1-\cos\theta)]}{1-\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}[kl(1+\cos\theta)]}{1+\cos\theta}\right) \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Esta última expresión puede simplificarse considerablemente con ayuda de las fórmulas trigonométricas

$$\mathbf{A} = (-1)^m \frac{2J_0 \mathbf{l}_z}{\omega r \operatorname{sen}^2\theta} \cos\frac{(2m+1)\pi\cos\theta}{2} \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

La intensidad del campo magnético de la onda radiada es

$$\mathbf{H} = (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}) \frac{(-1)^m 2J_0}{cr \operatorname{sen}^2 \theta} \cos[(m+1/2)\pi \cos\theta] \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Conforme a la fórmula general (IV.22) el valor medio de la intensidad de radiación en el ángulo sólido $d\Omega$ en el tiempo de un período T se escribirá:

$$dI = \frac{J_0^2}{2\pi c \operatorname{sen}^2 \theta} \cos^2\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \cos\theta\right] d\Omega.$$

412. $$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{l}_z}{cr}\left[J\left(t - \frac{r+l}{c}\right) - J\left(t - \frac{r-l}{c}\right)\right],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}.$$

413. El potencial vectorial (IV.8) en el plano XY a gran distancia de la corriente se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = (-1)^m \frac{2J_0 \mathbf{l}_z}{r\omega_m} e^{-\gamma t'} \operatorname{sen} \omega_m t'$$

donde $t' = t - r/c$ es el tiempo en el punto de observación considerando el retardo. La intensidad del campo magnético tiene en coordenadas cilíndricas solamente la componente angular la cual se expresa por la fórmula

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = (-1)^m \frac{2J_0}{cr} e^{-\gamma t}\left[\cos\omega_m t' - \frac{\gamma}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t'\right],$$

donde $t' \geqslant 0$ y $H_\varphi = 0$ para $t' < 0$. Los vectores E y H junto con el radio vector r del punto de observación forman una terna de vectores a dextrógiro, por lo tanto

$$E_z = -H_\varphi, \quad E_x = E_y = 0.$$

Para representar el campo electromagnético de radiación en forma de superposición de ondas monocromáticas, desarrollemos la intensidad del campo eléctrico en integral de Fourier

$$E_z(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega.$$

Realizando cálculos directos determinamos

$$E_z(\omega) = E_+(\omega) + iE_-(\omega),$$

$$E_+(\omega) = \frac{2E_0\omega^2\gamma}{(\omega^2+\omega_m^2+\gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_-(\omega) = \frac{E_0\omega(\omega^2-\omega_m^2-\gamma^2)}{(\omega^2+\omega_m^2+\gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_0 = (-1)^{m+1}\frac{2J_0}{cr}.$$

De esta manera, la descomposición de la intensidad del campo eléctrico de radiación en ondas monocromáticas tiene la forma

$$E_z = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[E_+ (\omega) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + E_- (\omega) \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] d\omega.$$

La igualdad $H_\psi = -E_z$ permite obtener una descomposición semejante para la intensidad del campo magnético.

414. $dI = \dfrac{J_0^2}{2\pi c} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 [kl (1 - \cos \theta)]}{(1 - \cos \theta)^2} d\Omega.$

415. $H_r = H_\theta = 0,$

$$H_\psi = (-1)^m \frac{2J_0 \operatorname{sen} (m\pi \cos \theta)}{cr \operatorname{sen} \theta} \frac{\operatorname{sen} \left[\dfrac{N}{2} ka \operatorname{sen} \theta \cos \psi \right]}{\operatorname{sen} \left[\dfrac{1}{2} ka \operatorname{sen} \theta \cos \psi \right]} \times$$

$$\times \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{N-1}{2c} a \operatorname{sen} \theta \cos \psi \right);$$

$$dI = \frac{J_0^2 \operatorname{sen}^2 (kl \cos \theta)}{2\pi c \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\operatorname{sen}^2 \left[\dfrac{N}{2} ka \operatorname{sen} \theta \cos \psi \right]}{\operatorname{sen}^2 \left[\dfrac{1}{2} ka \operatorname{sen} \theta \cos \psi \right]} d\Omega.$$

416. $dI = \dfrac{2i_0^2}{\pi \omega k} \dfrac{\operatorname{sen}^2 (kl \cos \theta) \operatorname{sen}^2 (kb \operatorname{sen} \theta \cos \psi)}{\operatorname{sen}^4 \theta \cos^2 \psi} d\Omega.$

417. $dI = \dfrac{2\pi R^2 i_0^2}{c} \left(\dfrac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} [kl (1 - \cos \theta)] J_0 (kR \operatorname{sen} \theta)}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\Omega.$

Aquí $J_0 (a)$ es la función de Bessel de orden cero, cuyo argumento es $a = kR \operatorname{sen} \theta$. Esta función aparece como resultado de la integración

$$\int_0^{2\pi} \cos [a \cos (\psi' - \psi)] d\psi' = 2\pi J_0 (a).$$

Para resolver el problema se ha utilizado también la integral

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} [a \cos (\psi' - \psi)] d\psi' = 0.$$

418. A considerable distancia r de los conos el potencial vectorial del campo de radiación se expresa por la fórmula

$$\mathbf{A} (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{i} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c} \right) dS', \qquad (1)$$

donde $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ y $dS' = r' \operatorname{sen} \theta_0 \, d\psi' \, dr'$, mientras que la integración se lleva a cabo respecto de las superficies laterales de los conos por los que fluye la corriente con densidad superficial

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') = \frac{J(r', t')}{2\pi r' \operatorname{sen} \theta_0} \tau.$$

El vector unitario τ está orientado a lo largo de la generatriz de los conos. En las designaciones adoptadas los vectores de la expresión subintegral (1) tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{n} = (\mathbf{l}_x \cos \psi + \mathbf{l}_y \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen} \theta + \mathbf{l}_z \cos \theta,$$

$$\mathbf{r}' = r' [(\mathbf{l}_x \cos \psi' + \mathbf{l}_y \operatorname{sen} \psi') \operatorname{sen} \theta_0 \pm \mathbf{l}_z \cos \theta_0],$$

$$\tau = \pm \frac{\mathbf{r}'}{r'},$$

donde θ y ψ son las coordenadas esféricas del punto de observación, y los símbolos + y — corresponden respectivamente a las superficies laterales de los conos, superior ($z' > 0$) e inferior ($z' < 0$).

En vista de que en la distribución de la corriente existe simetría axial, el potencial vectorial que se busca no depende, en coordenadas esféricas r, θ, ψ, del ángulo ψ. Por lo tanto, en la expresión subintegral (1) puede admitirse que $\psi = 0$. Entonces, la integral respecto a la variable ψ', que contiene el factor $\mathbf{l}_y \operatorname{sen} \psi'$, se anulará.

Tomando en consideración las observaciones mencionadas, obtenemos

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\pi cr} \int_0^b dr' \int_0^{2\pi} d\psi' \left[J\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c} \cos \Phi\right) \times \right.$$

$$\times (\mathbf{l}_z \cos \theta_0 + \mathbf{l}_x \operatorname{sen} \theta_0 \cos \psi') +$$

$$\left. + J\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c} \cos \widetilde{\Phi}\right) (\mathbf{l}_z \cos \theta_0 - \mathbf{l}_x \operatorname{sin} \theta_0 \cos \psi') \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi cr} \int_{-b}^{b} d\xi \int_0^{2\pi} d\psi' J\left(|\xi|, t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c} \cos \Phi\right) \times$$

$$\times (\mathbf{l}_z \cos \theta_0 + \mathbf{l}_x \operatorname{sen} \theta_0 \cos \psi'),$$

donde se han introducido las designaciones:

$$\cos \Phi = \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \theta \cos \psi' + \cos \theta_0 \cos 0,$$

$$\cos \widetilde{\Phi} = \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \theta \cos \psi' - \cos 0_0 \cos \theta.$$

Investigando la expresión rot A, no resulta difícil cerciorarse de que el campo magnético posee solamente la componente angular H_ψ.

Las otras componentes del vector **H** son nulas, como corresponde al problema con simetría axial. Definitivamente hallamos

$$dI = \frac{1}{2\,(2\pi c)^3}\left|\int\limits_{-b}^{b} d\xi \int\limits_{0}^{2\pi} d\psi' \frac{\partial}{\partial t} J\left(|\xi|,\ t-\frac{r}{c}+\frac{\xi}{c}\cos\Phi\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,(\cos\theta_0\,\mathrm{sen}\,\theta-\mathrm{sen}\,\theta_0\cos\theta\cos\psi')\right|^2 d\Omega;$$

$$dI = \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{4\pi c^3}\left[\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial}{\partial t} J\left(|\xi|,\ t-\frac{r}{c}+\frac{\xi}{c}\cos\theta\right)d\xi\right]^2 d\Omega$$

para $\theta_0 \to 0$;

$dI = 0$ para $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

§ 8. Problemas que requieren cálculos en computadoras

419. $$\mathscr{E}_d = \mathscr{E}_0 \int\limits_{\eta_0}^{\infty} \frac{\left(\frac{d\psi(\eta)}{d\eta}\right)^2 d\eta}{\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}\frac{1}{\eta^2}+\psi(\eta)}},$$

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{e^2}{a},$$

$$\psi(\eta) = 2\left(1+\frac{1}{\eta}\right)e^{-2\eta},$$

donde la magnitud η_0 es raíz de la ecuación

$$1-\frac{l^2}{a^2}\frac{1}{\eta_0^2}+\psi(\eta_0)=0.$$

En la fig. 12 se muestra la curva del logaritmo natural $\ln(\mathscr{E}_d/\mathscr{E}_0)$ como función del parámetro l/a. Cierta noción sobre la dependencia de la energía total de radiación dipolar respecto del parámetro de impacto se da en la tabla 1.

Tabla 1

l/a	0,5	1	2	5
$\mathscr{E}_d/\mathscr{E}_0$	$3{,}36\cdot10^{2}$	5,2	$1{,}23\cdot10^{-2}$	$5{,}5\cdot10^{-6}$

420. $$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} d\xi \int_{\eta_0(\xi)} d\eta \frac{\xi e^{-2\eta}}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x}}},$$

$$\varkappa_0 = \frac{4\pi a e^2 U_0}{3mc^3} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}; \quad x = \frac{\mathscr{E}_0}{U_0},$$

donde la función $\eta_0 = \eta_0(\xi)$ se determina como la solución de la ecuación

$$1 - \frac{\xi^2}{\eta_0^2} - \frac{e^{-\eta_0}}{x} = 0.$$

En la fig. 13 viene mostrada la curva de la magnitud $\varkappa/\varkappa_0$ en función del parámetro $\mathscr{E}_0/U_0$.

Indicación. Para calcular en computadora resulta más cómodo pasar de la integral doble a la integral simple, realizando primera-

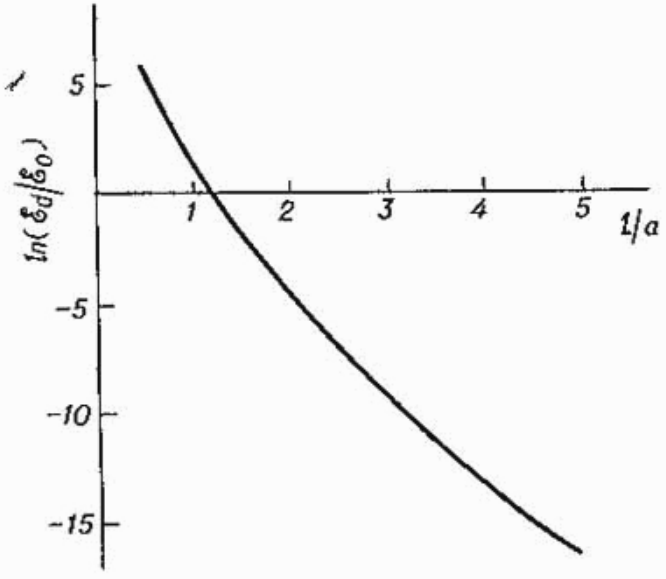


Fig. 12

mente la integración respecto a la variable ξ entre los límites 0 y $\xi_0(\eta)$ y después respecto a η en el intervalo comprendido entre $\eta_{\text{mín}}$ y ∞. En el plano de las variables η y ξ la integración se efectúa en la región que está rayada en la fig. 14. Para cada valor fijado de x la función $\xi_0(\eta)$ se determina como la solución de la ecuación

$$1 - \frac{\xi_0^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x} = 0.$$

Al calcular el valor mínimo η_{min} de la variable η hay que tener en cuenta la desigualdad

$$1-\frac{\xi^2}{\eta^2}-\frac{e^{-\eta}}{x}\geqslant 0,$$

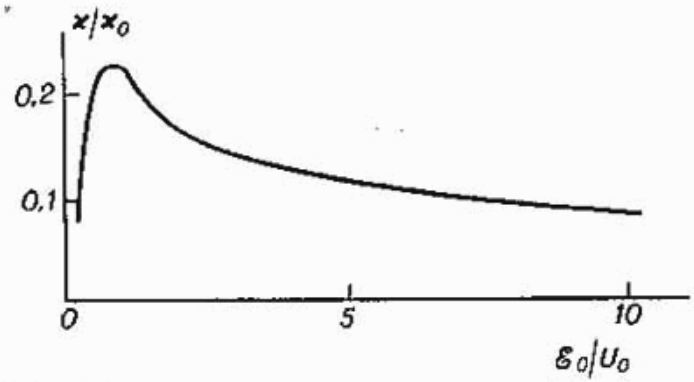


Fig. 13

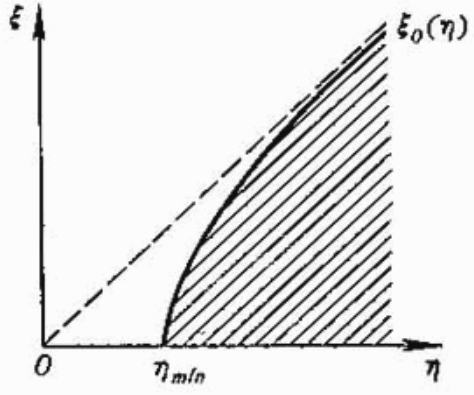


Fig. 14

que nos da $\eta_{min} = -\ln x$ para $x < 1$ y $\eta_{min} = 0$ para $x \geqslant 1$. Como resultado obtenemos

$$\varkappa=\frac{\varkappa_0}{\sqrt{x}}\int\limits_{\eta_{min}}^{\infty}\eta^2 e^{-2\eta}\sqrt{1-\frac{e^{-\eta}}{x}}\,d\eta.$$

La expresión asintótica de la magnitud $\varkappa$ para valores grandes $x \gg 1$ es

$$\varkappa=\frac{\varkappa_0}{4\sqrt{x}}.$$

421. $I = I_0 (f_1^2 + f_2^2)$, donde $I_0 = \dfrac{2e^4 Q^2 v^2}{3m^2 c^3 l^4}$,

$$f_1 = \frac{1}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1+\xi^2)^{3/2}} d\xi,$$

$$f_2 = \frac{\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\xi \operatorname{sen} \dfrac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1+\xi^2)^{3/2}} d\xi,$$

$$\eta = \frac{vt}{l}.$$

En la fig. 15 viene mostrada la intensidad relativa I/I_0 de radiación del oscilador como función de la variable η, la cual toma para el caso $v = \omega_0 l$ el valor $\eta = \omega_0 t$.

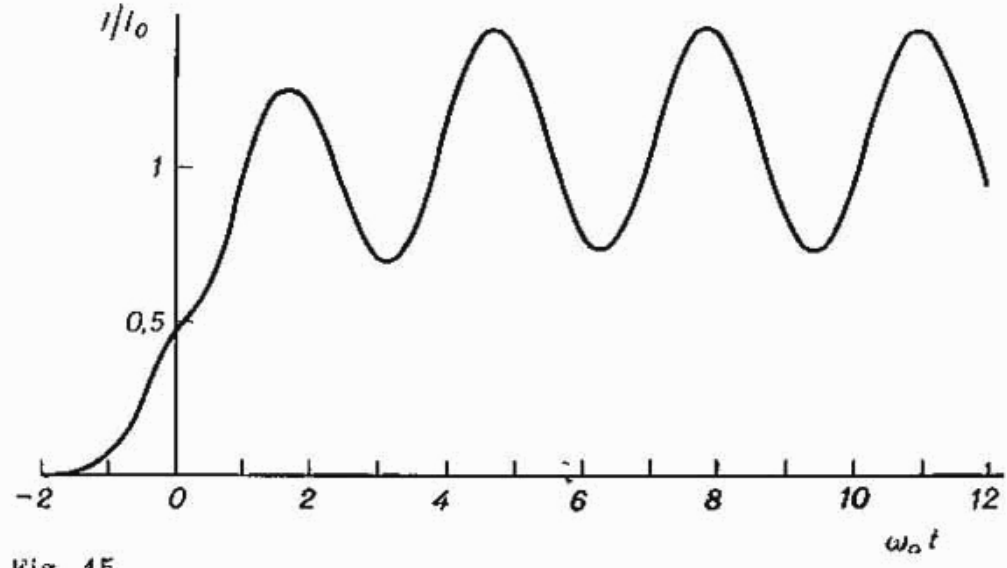


Fig. 15

422. $I = I_0 f^2$, donde $I_0 = \dfrac{2e^2 F_0^2}{3m^2 c^3}$,

$$f = e^{-\eta^2} - \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\frac{\gamma\tau}{2}(\xi-\eta)-\xi^2} \left[\gamma\tau \cos \omega\tau (\eta - \xi) + \right.$$

$$\left. + \left(\omega\tau - \frac{\gamma^2\tau}{4\omega} \right) \operatorname{sen} \omega\tau (\eta - \xi) \right] d\xi,$$

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{t}{\tau}, \quad \eta_0 = \frac{t_0}{\tau}.$$

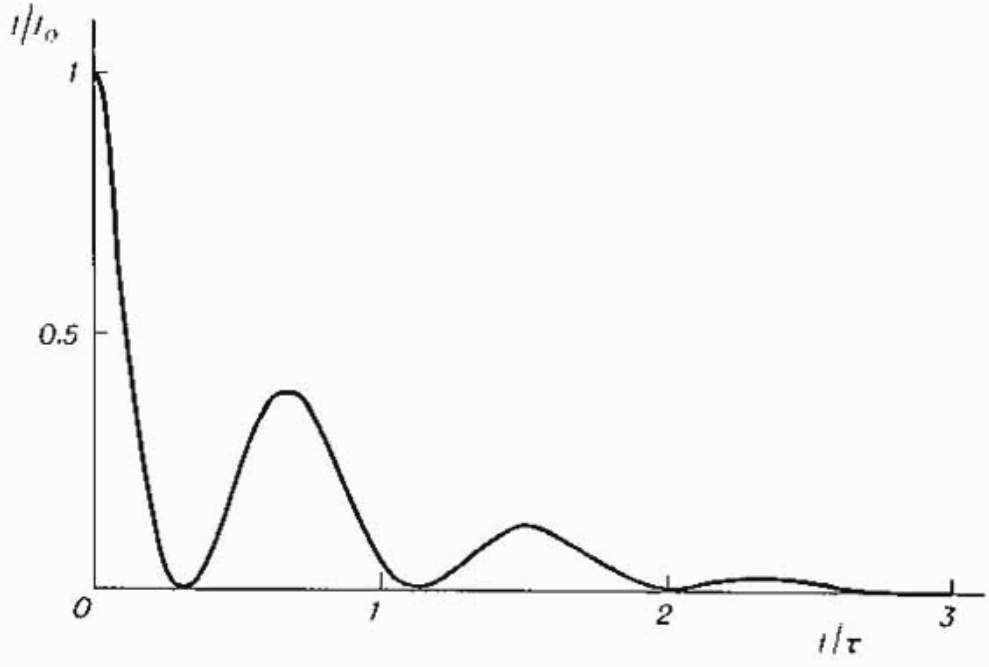


Fig. 16

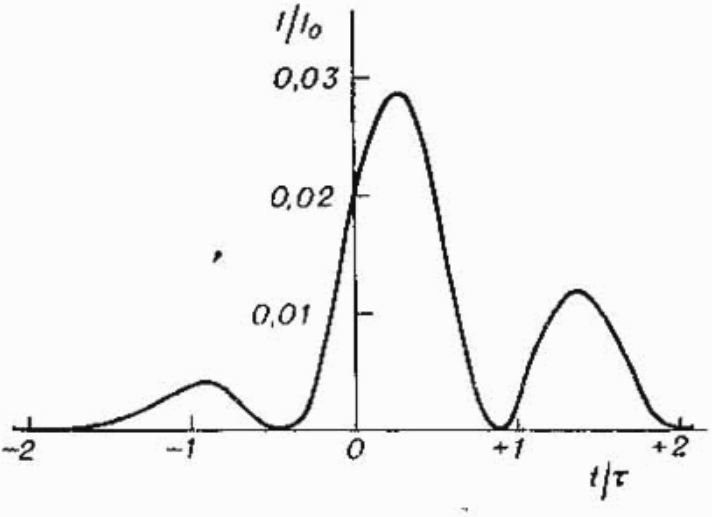


Fig. 17

La intensidad de radiación I del oscilador como función de la variable t/τ para $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$ en los casos $t_0 = 0$ y $t_0 = -\infty$ se muestra respectivamente en las figs. 16 y 17.

423. $$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8Q^2\beta^2\omega^4}{3\pi c^3 v^2 l^2}\,(f_1^2+f_2^2)\,d\omega,$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos\dfrac{\omega l}{v}\,\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}\,d\xi, \quad f_2 = \int_0^\infty \frac{\xi\,\operatorname{sen}\dfrac{\omega l}{v}\,\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}}\,d\xi.$$

La descomposición espectral de radiación viene mostrada on la fig. 18. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud $\dfrac{8\,Q^2\beta^2v^2}{3\pi c^3 l^6}$.

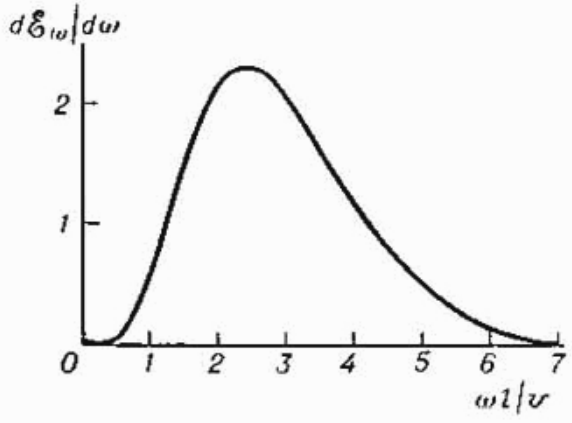


Fig. 18

424. $$\frac{d\mathscr{E}^a_\omega}{d\omega} = \frac{4e^2\mathscr{E}_0 A_1 A_2}{3\pi mc^3\,(A_1+A_2)}\left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2 F^2,$$

$$F = 2\int_0^\infty \frac{\cos\left[\dfrac{\omega}{\omega_0}\,(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{1+\operatorname{ch}\xi}\,d\xi,$$

$$\omega_0 = \frac{2\mathscr{E}_0}{Z_1 Z_2 e^2}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0\,(A_1+A_2)}{mA_1A_2}};$$

$$\frac{d\mathscr{E}^b_\omega}{d\omega} = \frac{4e^2\mathscr{E}_0 A_1 A_1}{3\pi mc^3\,(A_1+A_2)}\left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2 (f_1^2+f_2^2),$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos\left[\dfrac{\omega}{\omega_0}\,(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{1+\operatorname{ch}\xi}\,d\xi,$$

$$f_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\left[\dfrac{\omega}{\omega_0}\,(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{1+\operatorname{ch}\xi}\,d\xi.$$

La descomposición espectral de radiación viene mostrada en la fig. 19. Las curvas *1* y *2* corresponden respectivamente a los casos

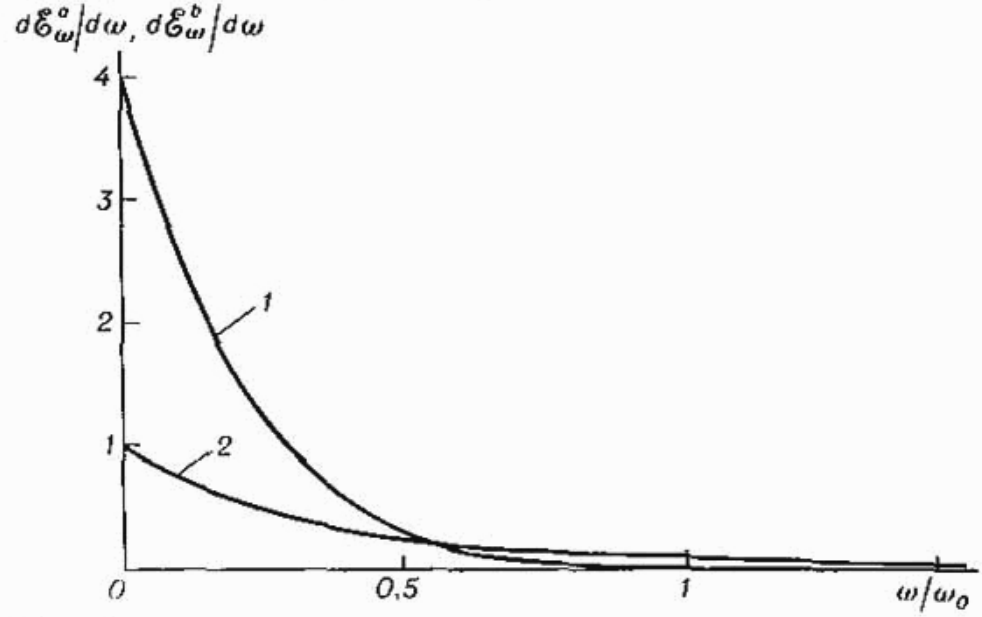


Fig. 19

a y *b*. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud

$$\frac{4e^2\mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi mc^3 (A_1+A_2)} \left(\frac{Z_1}{A_1}-\frac{Z_2}{A_2}\right)^2.$$

425. $$\frac{d\mathcal{E}^a_\omega}{d\omega}=\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 F^2,$$

$$F=2\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sen}\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}\,d\xi,$$

$$\omega_0=\frac{2\mathcal{E}_0}{Z_1Z_2e^2}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0(A_1+A_2)}{mA_1A_2}};$$

$$\frac{d\mathcal{E}^b_\omega}{d\omega}=\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 (f_1^2+f_2^2),$$

$$f_1=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi \operatorname{sen}\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}\,d\xi,$$

$$f_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi \cos\left[\frac{\omega}{\omega_0}(\xi+\operatorname{sh}\xi)\right]}{(1+\operatorname{ch}\xi)^2}\,d\xi.$$

La descomposición espectral de radiación viene mostrada en la fig. 20.

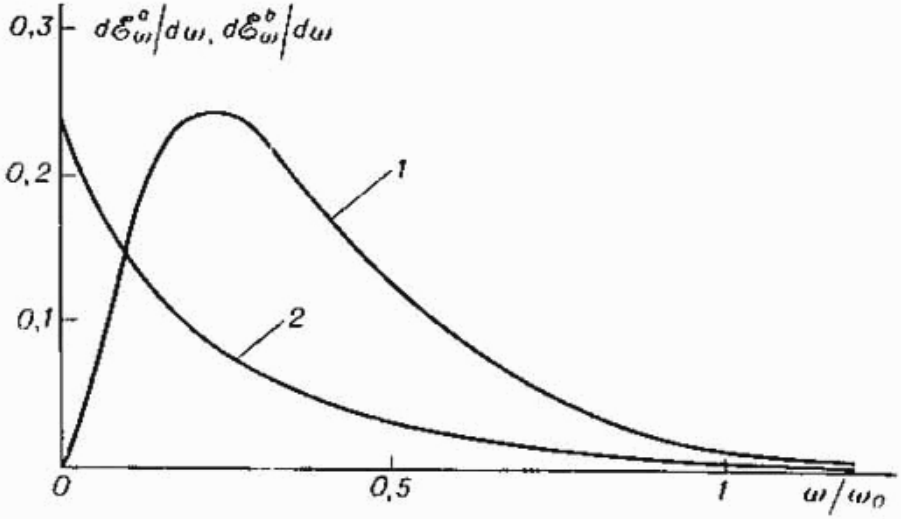


Fig. 20

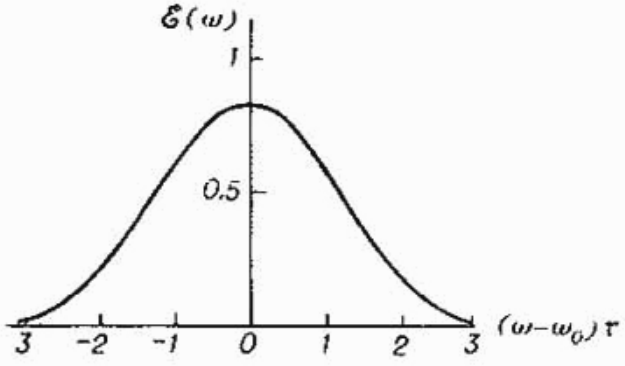


Fig. 21

Las curvas *1* y *2* corresponden respectivamente a los casos *a* y *b*. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud

$$\frac{8e^2Z^2}{15\pi cA^2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2.$$

426. $$\mathcal{E}(\omega)=\frac{c\tau^2E_0^2}{(2\pi)^2}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^4}{5}}\cos\left|(\omega-\omega_0)\tau\xi\right|d\xi\right)^2.$$

$$\Delta\omega=\frac{2x}{\tau}$$

donde la magnitud x es raíz de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-\xi^4}\left(1-\sqrt{2}\cos x\xi\right)d\xi=0.$$

La línea espectral de radiación se muestra en la fig. 21. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud $c\tau^2E_0^2/(2\pi)$. La anchura de la línea espectral es $\Delta\omega = 2{,}8/\tau$.

427. $$\mathrm{E}=\mathbf{l}_z E_0\int_{-1}^{1}\left(e^{-\left(t'-\frac{l-b\xi}{c\tau}\right)^6}-e^{-\left(t'+\frac{l+b\xi}{c\tau}\right)^6}\right)d\xi,$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{n}\times\mathbf{E},\qquad E_0=\frac{bi_0}{cr},$$

$$t'=\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{r}{c}\right),\qquad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\mathscr{E}(\omega)=\frac{c\tau^2E_0^2}{\pi^2}\left[\int_0^\infty d\eta\int_{-1}^{1}d\xi\left(e^{-(\xi-1+\eta)^6}-e^{-(\xi+1+\eta)^6}\right)\operatorname{sen}\omega\tau\eta\right]^2$$

La curva de intensidad del campo eléctrico y la línea espectral de radiación vienen mostradas respectivamente en las figs. 22 y 23. En la fig. 23 a la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud $c\tau^2E_0^2/\pi^2$.

428. $$\frac{dI}{d\Omega}=$$

$$=\frac{2\pi R^4j_0^2}{c}\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\left[kh\left(1-\cos\theta\right)\right]}{(1-\cos\theta)^2}\left(\int_0^1 e^{-\xi^2}J_0\left(kR\xi\operatorname{sen}\theta\right)\xi\,d\xi\right)^2$$

En la fig. 24 se muestra el diagrama direccional de radiación para el caso $h = R = 1/k$. La dirección de radiación máxima con intensidad $\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\text{máx}}=\frac{R^4j_0^2}{2c}$ forma con el eje polar el ángulo $\theta_m = 73°$.

429. $$\frac{dI}{d\Omega}=$$

$$=\frac{J_0^2}{4\pi^3c}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{\pi\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\psi\right)}{2\sqrt{2}}}{1+\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi-\operatorname{sen}2\theta\cos\psi}\left(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\cos\psi\right)d\psi\right)^2$$

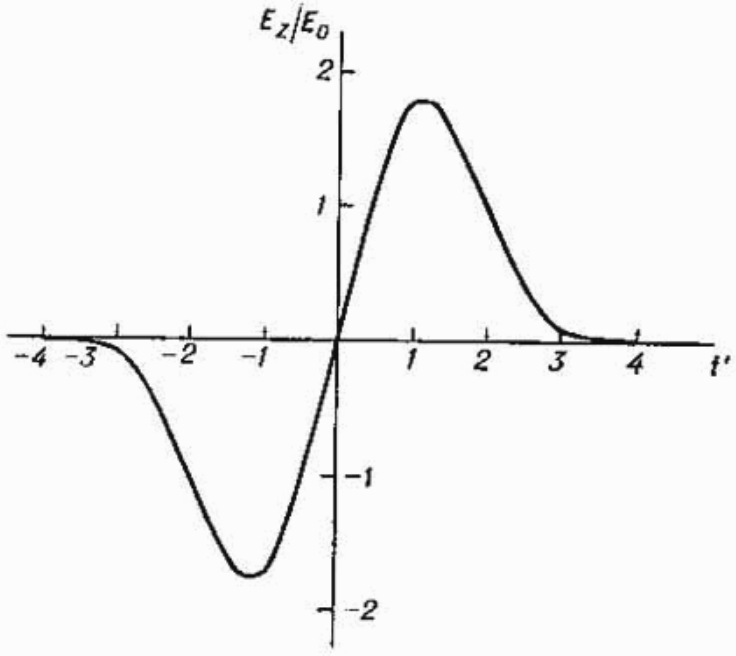


Fig. 22

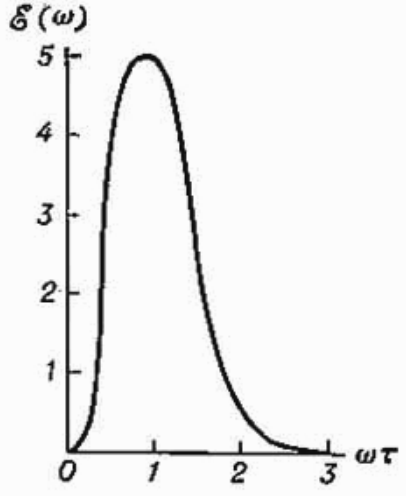


Fig. 23

En la fig. 25 se muestra la magnitud $dI/d\Omega$ en función del ángulo θ. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud $J_0^2/(4\pi^3 c)$. La curva es simétrica respecto al ángulo recto $\theta = \pi/2$.

430. En la zona de onda, donde las intensidades de los campos eléctrico y magnético en módulo decrecen inversamente proporcional

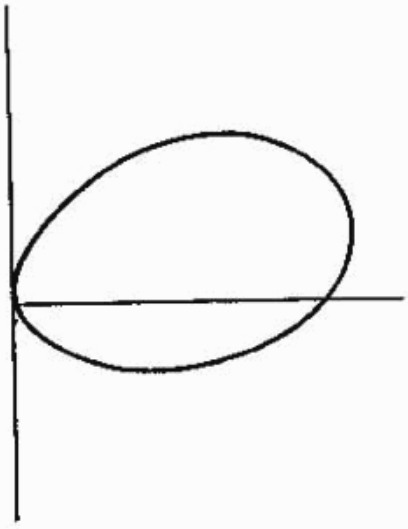


Fig. 24

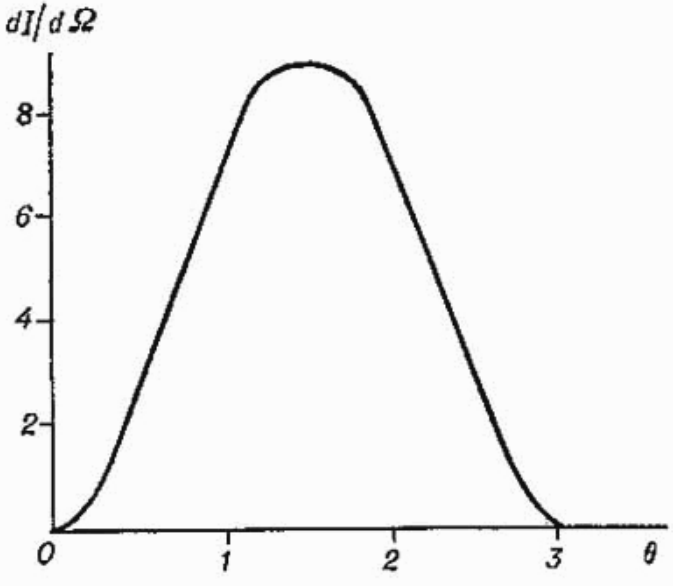


Fig. 25

a la distancia desde el punto de observación hasta el centro del sistema radiante, se observa la correlación $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n}\mathbf{r}'$, y entonces, el potencial vectorial retardado (IV.8) toma la forma

$$A_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{l_\beta}{cr} \int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} \dot{F}\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV'. \qquad (1)$$

La integral obtenida es según sus subíndices α y β un tensor simétrico tridimensional de segundo rango. En vista de que la expre-

sión subintegral contiene el único vector independiente $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, el tensor mencionado tiene que tener la forma

$$\int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV' = a\delta_{\alpha\beta} + b n_\alpha n_\beta, \qquad (2)$$

donde a y b son ciertas magnitudes escalares.

Igualando las sumas diagonales de los tensores de las partes izquierda y derecha de la igualdad (2) obtenemos

$$\int F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV' = 3a + b. \qquad (3)$$

Multipliquemos las dos partes de la igualdad (2) por la expresión $n_\alpha n_\beta$, sumando a continuación los subíndices tensoriales que se repiten

$$\int \frac{(\mathbf{nr}')^2}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV' = a + b. \qquad (4)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones algebraicas (3) y (4), determinamos las magnitudes a y b en función de las cuales se expresa el potencial vectorial (1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{l}}{cr} [a\mathbf{l} + b(\mathbf{ln})\mathbf{n}]. \qquad (5)$$

Al calcular el rotacional del potencial vectorial (5) en la zona de onda los sumandos que contienen el factor $1/r^2$ se omiten. Como resultado obtenemos

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{n}}{2c^2 r} \int \left(1 - \frac{(\mathbf{nr}')^2}{r'^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{nr}'}{c}\right) dV.$$

Si la función $F(r, t)$ se sustituye por la expresión dada y se admite que $c\tau = 10\lambda$ y $\frac{1}{\tau}(t - r/c) = t'$, entonces se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{\pi\lambda^3 j_0}{c^2 \tau r} \int_0^\infty d\xi \int_{-1}^{1} dx\, (1 - x^2) \times$$

$$\times \left[1 - t' + \frac{\xi}{10}(1 - x)\right] e^{-\left[\xi + t' - \frac{\xi}{10}(1-x)\right]}, \qquad (6)$$

donde la integración se efectúa respecto a la superficie rayada del dibujo esquemático mostrado en la fig. 26. En la región de integración

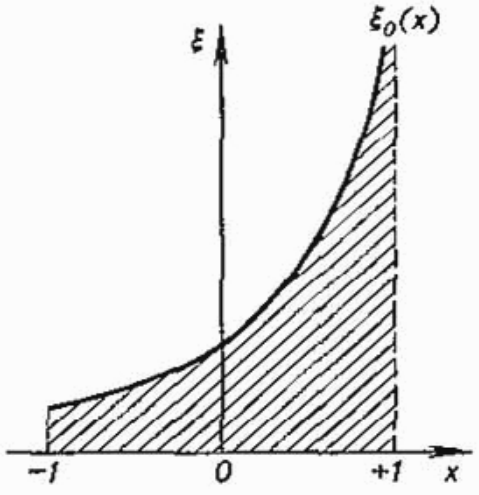


Fig. 26

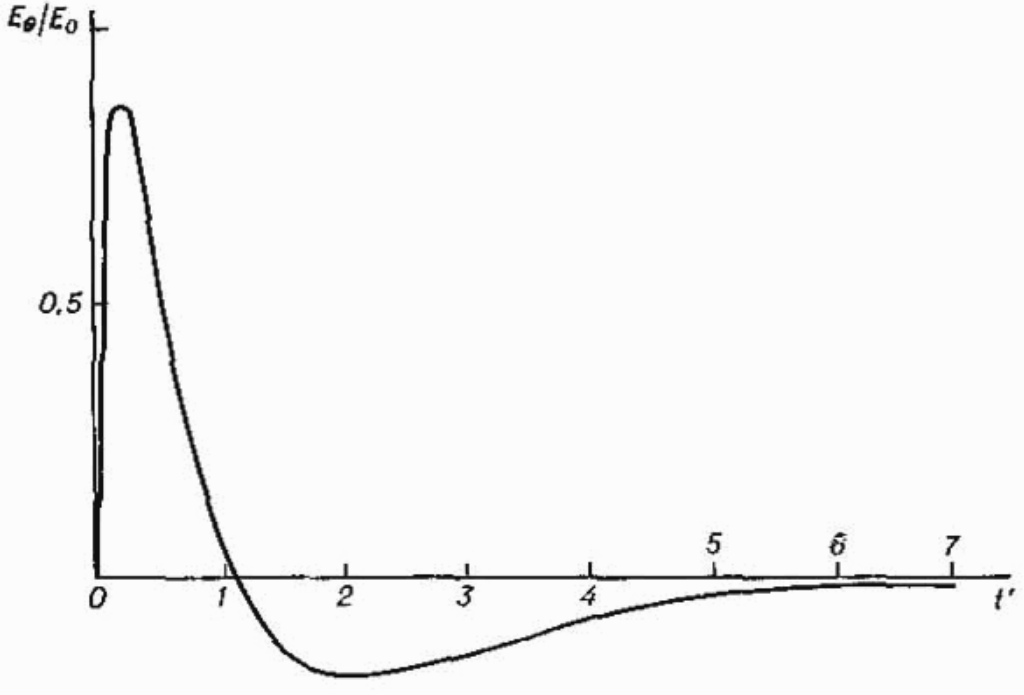


Fig. 27

se observa la condición $t' \geqslant \xi\,(1 - x)/10$, la cual es una consecuencia del retardo de las señales electromagnéticas que llegan al punto de observación.

Realicemos en la integral (6) la integración respecto a la variable ξ entre los límites 0 y $\xi_0(x) = 10t'/(1-x)$, siendo el valor de x fijo, (fig. 26). La integral restante respecto a la variable x

$$\mathbf{H}(r, t) =$$

$$= (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{10\pi\lambda^3 j_0}{c^2 \tau r} \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{(x+9)^2} \left[(10 - t'x - 9t') e^{-t'} - 10e^{-\frac{10t'}{1-x}} \right] dx$$

se determina mediante métodos numéricos.

Las intensidades de los campos eléctrico y magnético están relacionadas entre sí, en la zona de onda, por la correlación $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$, o en el sistema de coordenadas esférico

$$\mathbf{E} = \mathbf{l}_\theta E_\theta, \quad \mathbf{H} = \mathbf{l}_\psi H_\psi, \quad E_\theta = H_\psi.$$

La intensidad E_θ del campo eléctrico de radiación en cierto punto fijo de la zona de onda se muestra en la fig. 27. A la unidad en el eje de ordenadas le corresponde la magnitud

$$E_0 = \frac{\pi\lambda^3 j_0 \operatorname{sen}\theta}{c^2 \tau r}.$$

Capítulo V CAMPO DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS CARGADAS

§ 1. Transformación del campo electromagnético

431. Si se ha hallado el sistema de coordenadas K', en el cual $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$, entonces, cualquier otro sistema de coordenadas K'' que se mueva paralelamente a los vectores $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{H}'$ también responde a la condición planteada $\mathbf{E}'' \parallel \mathbf{H}''$. Por eso, vamos a buscar el sistema de coordenadas con las particularidades dadas entre aquellos que se mueven perpendicularmente a los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$. Al pasar a tales sistemas de coordenadas los vectores de intensidades de los campos eléctrico y magnético giran en el plano perpendicular a la velocidad relativa de dichos sistemas, mientras que las componentes de las intensidades, paralelas a la velocidad relativa, no surjen.

Elijamos el sistema de coordenadas inicial de tal manera que $E_x = H_x = 0$. Entonces, el sistema buscado de coordenadas con tilde se mueve con cierta velocidad V a lo largo del eje X, además los ejes cartesianos homónimos en los sistemas de coordenadas indicados son paralelos. En el sistema de coordenadas buscado tenemos $E'_x = H'_x = 0$ y $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = 0$, lo que nos da

$$E'_y H'_z - H'_y E'_z = 0. \tag{1}$$

Expresemos las componentes con tilde de los vectores mediante las de sin tilde empleando las fórmulas de transformación de los campos (V.28) y (V.29). Después de esto, la correlación (1) se convertirá en una ecuación cuadrática respecto a la magnitud V/c:

$$\left(\frac{V}{c}\right)^2 - \frac{E^2 + H^2}{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|} \frac{V}{c} + 1 = 0,$$

donde V es la proyección de la velocidad buscada sobre el eje X. De las dos raíces de esta ecuación elegimos aquélla que responde a la condición $\left|\frac{V}{c}\right| < 1$. La otra raíz satisface la desigualdad de sentido contrario ya que el producto de las raíces es equivalente a la unidad. Definitivamente hallamos

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = (E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{EH})^2}) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{2(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2}$$

Si $\mathbf{EH} < 0$, entonces, en el sistema de coordenadas encontrado los vectores $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{H}'$ son antiparalelos.

432. a) Sea $E > H$, entonces, conforme a las invariantes del campo electromagnético (V.32) existe un sistema de coordenadas K' inercial tal, para el cual solamente el campo eléctrico difiere de cero $\mathbf{E}' \neq 0$, $\mathbf{H}' = 0$. La velocidad $\mathbf{V}$ de este sistema de coordenadas con tilde se encuentra en el plano perpendicular al vector $\mathbf{H}$, ya que la componente del vector de intensidad del campo magnético, paralelo al vector $\mathbf{V}$, no varía al pasar al sistema de referencia señalado $\mathbf{HV} = \mathbf{H'V} = 0$. Los vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{E}$ forman entre sí cierto ángulo α.

Para comodidad elijamos las direcciones de los vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{H}$ en calidad de ejes X y Z del sistema inicial de coordenadas. Entonces, el sistema de coordenadas buscado K' se mueve con una velocidad $\mathbf{V}$ a lo largo del eje X, siendo paralelos los ejes cartesianos homónimos de los sistemas de coordenadas mencionados. En el sistema de coordenadas K' no hay campo magnético:

$$H'_x = H'_y = 0, \quad H'_z = \frac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

donde $H_z = H$ y $E_y = E \operatorname{sen} \alpha$. De aquí se obtiene

$$\frac{V}{c} = \frac{H}{E \operatorname{sen} \alpha}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})^2} \mathbf{n}.$$

Aquí $\mathbf{n}$ es el vector unitario que se encuentra en el plano perpendicular a la intensidad $\mathbf{H}$ del campo magnético. La condición $\frac{V}{c} < 1$ impone limitaciones a las posibles orientaciones de $\mathbf{n}$ respecto al vector $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{sen} \alpha > \frac{H}{E}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} \parallel \mathbf{H}.$$

Mediante las fórmulas (V.28) hallamos

$$\mathbf{E}' = \mathbf{n}(\mathbf{En}) + \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{H} \times \mathbf{n}|} \sqrt{(\mathbf{E} \times \mathbf{n})^2 - H^2}.$$

b) Si es que $E < H$, entonces, existe un sistema de coordenadas tal, en el cual sólo hay campo magnético. Repitiendo los razonamientos anteriores obtenemos

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{(\mathbf{n} \times \mathbf{H})^2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{n}(\mathbf{Hn}) - \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{n}|} \sqrt{(\mathbf{H} \times \mathbf{n})^2 - E^2},$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario que se encuentra en el plano perpendicular a la intensidad $\mathbf{E}$ del campo eléctrico. La condición $\frac{V}{c} < 1$ impone limitaciones a los posibles valores del ángulo α entre los vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{H}$:

$$|\operatorname{sen} \alpha| > \frac{E}{H}, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} \parallel \mathbf{E}.$$

433. $\frac{V}{c}=\frac{2((E\times H)\,n)\,n}{(E\times n)^2+(H\times n)^2}$, donde n es el vector unitario de dirección arbitraria.

434. $V=\pm\frac{c}{N}\frac{j}{|j|}$.

436. $E'=\frac{1}{\sqrt{2}}(E^2-H^2+\sqrt{(E^2-H^2)^2+8(EH)^2})^{1/2}$,

$H'=\frac{1}{\sqrt{2}}(H^2-E^2+\sqrt{(H^2-E^2)^2+8(HE)^2})^{1/2}$.

437. En el sistema de coordenadas relacionado con el núcleo tenemos

$$E=\frac{Qr}{r^3},\quad H=0.$$

En el sistema inercial de coordenadas con tilde, donde en el momento dado reposa el neutrón, resulta fácil determinar la intensidad del campo magnético con una precisión requerida, mediante las fórmulas de transformación (V.31):

$$H'=-\frac{1}{c}(v\times E).$$

Por esto, la fuerza aplicada al neutrón se expresa así:

$$F'=\operatorname{grad}'(\mu H').$$

Con la misma aproximación, la fuerza cuadridimensional $f_i'=(f', f_4')$ tiene las componentes

$$f'=\left.\frac{F'}{c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right|_{v'=0}=\frac{F'}{c},\quad f_4'=\left.\frac{v'F'}{c^2\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right|_{v'=0}=0,$$

donde la velocidad v' del neutrón en el sistema de coordenadas con tilde se adopta igual a cero. Aplicando las fórmulas de transformación del 4-vector y menospreciando los sumandos pequeños proporcionales a v^2/c^2, determinamos las componentes espaciales de la 4-fuerza $f_i=(f, f_4)$ en el sistema inicial de coordenadas

$$f=f'=1/c\operatorname{grad}'(\mu H').$$

Si se omiten los miembros de orden v^2/c^2, entonces, $f=1/cF$ y las componentes de los radio vectores r y r' están vinculados entre sí mediante la transformación de Galileo. Por esto

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z'}=\frac{\partial}{\partial z}.$$

Esto permite escribir definitivamente

$$F=\operatorname{grad}\left(\frac{v\times\mu}{c}E\right)=\frac{Q}{c}\left(\frac{v\times\mu}{r^3}-3\frac{(v\times\mu)\,r}{r^5}r\right).$$

De aquí se ve que respecto a la intensidad **E** del campo exterior el momento magnético μ que vuela es equivalente al dipolo eléctrico con momento $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{v} \times \mu}{c}$.

438. $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right) = \left(\frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c}\operatorname{grad}\right)\mathbf{H}$. De la expresión para la fuerza se deduce la conclusión de que el dipolo eléctrico **d** que pasa, respecto a la intensidad **H** del campo exterior, es equivalente al momento magnético $\mu = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c}$.

439. *Indicación.* Aplíquese la ley de transformación de los tensores (V.9) y la matriz (V.5) de la transformación de Lorentz.

441. $$\omega = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'},$$

donde ω y θ son respectivamente la frecuencia de la onda electromagnética y el ángulo entre el vector **k** de onda y la velocidad **V** de movimiento del sistema inercial de coordenadas con tilde, respecto al que está en reposo, en correspondencia con las designaciones admitidas en las fórmulas (V.3) . . . (V.6). Con tilde están designadas las magnitudes semejantes en el sistema de referencia en movimiento. En el caso de que $V \ll c$ tenemos

$$\omega = \omega'\left(1 + \frac{V}{c}\cos\theta'\right) = \omega' + \mathbf{k}'\mathbf{V} \quad \text{para} \quad \frac{V}{c} \ll |\cos\theta'|,$$

$$\omega = \omega'\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) \quad \text{para} \quad \theta' = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta' - \theta = \frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta.$$

442. En el sistema de coordenadas con tilde, relacionado con el espejo en movimiento, las leyes de reflexión de la onda electromagnética nos conllevan a las igualdades $k'_{1x} = -k'_{2x}$ y $\omega'_1 = \omega'_2$, donde el eje X' está orientado a lo largo del vector **V** de la velocidad del espejo, siendo paralelos los ejes cartesianos homónimos de los sistemas de coordenadas en reposo y movimiento. En las dos igualdades mencionadas, con ayuda de las fórmulas de transformación de Lorentz, expresamos las componentes con tilde de los vectores cuadridimensionales de onda

$$k'_{1l} = \left(\mathbf{k}'_1,\ i\frac{\omega'_1}{c}\right) \quad \text{y} \quad k'_{2l} = \left(\mathbf{k}'_2,\ i\frac{\omega'_2}{c}\right)$$

mediante sus componentes en el sistema de coordenadas en reposo. Como resultado se obtienen dos ecuaciones algebraicas respecto a las

magnitudes que se buscan. La solución de dichas ecuaciones nos da la respuesta a las preguntas planteadas

$$\cos\theta_2 = \frac{2\beta + (1+\beta)^2 \cos\theta_1}{1+\beta^2+2\beta\cos\theta_1},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1+\beta^2+2\beta\cos\theta_1}{1-\beta^2},$$

donde está designado $\beta = V/c$.

443. $w = w_0 \left(\frac{c+V}{c-V}\right)^2, \quad g = \frac{wV}{cV}.$

Indicación. Hay que pasar al sistema de coordenadas relacionado con el espejo en movimiento y aplicar la ley de reflexión de la onda electromagnética por una superficie plana fija, para hallar los parámetros de la onda reflejada. Después de determinar la onda reflejada en el sistema de coordenadas en movimiento, volver nuevamente al sistema de coordenadas de laboratorio, valiéndose de las fórmulas (V.28) . . . (V.31) para transformar las intensidades de los campos eléctrico y magnético de la onda reflejada.

444. $w' = w \frac{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\alpha\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$

445. $\mathbf{F} = \frac{a^2 E_0^2}{8} \frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}} \frac{\mathbf{k}}{k}.$

§ 2. Radiación emitida por una carga en movimiento rápido

446. $$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{cr}\left(\mathbf{v} + (\mathbf{nv})\frac{\mathbf{v}}{c} + (\mathbf{nr}_e)\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} + \right.$$

$$\left. + 2(\mathbf{nr}_e)(\mathbf{nv})\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} + (\mathbf{nr}_e)(\dot{\mathbf{nv}})\frac{\mathbf{v}}{c^2} + (\mathbf{nv})^2\frac{\mathbf{v}}{c^2} + 1/2\,(\mathbf{nr}_e)^2\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{c^2}\right),$$

$$\mathbf{H} = 1/c\,(\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}).$$

Aquí el radio vector $\mathbf{r}_e$ y la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga se toman en el momento de tiempo $t - r/c$, donde r es la distancia entre un punto fijo interior de la región por donde se mueve la carga y el punto de observación ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$).

447. El resultado se da mediante las fórmulas (V.44) y (V.45).

Indicación. En vista de que los potenciales de Liénard — Wiechert dependen evidentemente del momento retardado de tiempo t', es menester calcular con anticipación las derivadas de esta magnitud

respecto a las variables x, y, z y t. Para esto, hay que diferenciar las dos partes de la igualdad $R(t') = c(t - t')$ respecto al tiempo de observación t:

$$\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right). \tag{1}$$

La magnitud $\partial R/\partial t'$ se determina diferenciando la identidad $R^2 = \mathbf{R}^2$ teniendo en cuenta la correlación $\partial \mathbf{R}(t')/\partial t' = -\mathbf{v}(t')$, lo que nos da

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}, \tag{2}$$

Introduciendo la expresión hallada (2) en la fórmula (1) se obtiene una igualdad útil

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{Rc}}. \tag{3}$$

De forma semejante se calcula grad t', diferenciando las dos partes de la igualdad $R(t') = c(t - t')$ respecto a las coordenadas x, y, z del punto de observación

$$\operatorname{grad} R(t') = -c \operatorname{grad} t'. \tag{4}$$

Por otra parte, examinando la magnitud $R(t')$ como la distancia entre dos puntos $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$, se puede escribir

$$\operatorname{grad} R(t') = \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{\partial R}{\partial t'} \operatorname{grad} t'. \tag{5}$$

Igualando las dos partes derechas de las igualdades (4) y (5) se halla otra correlación necesaria

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \dfrac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}. \tag{6}$$

Las fórmulas obtenidas (3) y (6) facilitan considerablemente el cálculo de las intensidades de los campos (V.44) y (V.45).

448. El resultado se obtiene de las fórmulas (V.48) y (V.49).

449. $I = \dfrac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} \dfrac{1 + \dfrac{1}{5}\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^4}$. En el caso ultrarelativista:

$$I = \frac{4e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{5c^3} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^4}.$$

Para $v^2 \ll c^2$

$$I = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}\left(2 + \frac{21}{5}\frac{v^2}{c^2}\right),$$

donde el cuadrado de la aceleración $\dot{\mathbf{v}}^2$ también contiene sumandos pequeños de orden v^2/c^2. Por ejemplo, en el caso de movimiento de la carga e en un campo eléctrico constante y homogéneo con intensidad E, la última fórmula adquiere la forma

$$I = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}\left(1+\frac{6}{5}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

450. La energía de la partícula se gasta en la radiación $-d\mathscr{E}_c = d\mathscr{E}_{rad}$. Mediante las fórmulas (V.48) y (V.51) hallamos las pérdidas energéticas de la partícula durante el tiempo dt':

$$-d\mathscr{E}_c = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{2c^3}\,dt'\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{\left(1-\frac{v}{c}x\right)^5}\,dx.$$

La integral debe calcularse dos veces por partes, cada vez diferenciando el numerador de la expresión subintegral,

$$-d\mathscr{E}_c = \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\,dt'.$$

Empleando la ecuación de movimiento (V.17) y las fórmulas (V.16) y (V.18) se determina el cuadrado de la aceleración de la partícula, cuya velocidad es paralela al vector E:

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2E^2}{m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3.$$

Después de esto, la velocidad con la que la partícula pierde energía en radiación, calculada a base de las fórmulas (V.48) y (V.51), toma la forma de

$$\left(-\frac{d\mathscr{E}_c}{dt'}\right)_{rad} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3},$$

lo que coincide con la expresión obtenida a partir de la fórmula (V.58) para una partícula cargada que avanza paralelamente a la intensidad del campo eléctrico.

451. La intensidad de radiación

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ es la velocidad del electrón en el momento de tiempo t. Elijamos en calidad de ejes X e Y la dirección de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{v}(0)$. Entonces,

$$\frac{E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2[(mc^2)^2+c^2p_y^2],$$

donde p_y es la proyección del impulso del electrón en la dirección de su velocidad inicial $\mathbf{v}$ (0).

En vista de que la energía radiada es pequeña comparada con la cinética, la influencia inversa del campo de radiación sobre el movimiento del electrón puede menospreciarse. Conforme a la ecuación de movimiento (V.17) la magnitud p_y en este caso conserva sin variar su valor, determinado a base de la condición inicial, por esto

$$(mc^2)^2 + c^2 p_y^2 = \mathscr{E}_0^2.$$

Por consiguiente, la intensidad de radiación del electrón es constante, mientras que la energía radiada resulta proporcional al tiempo:

$$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^4 E^2 \mathscr{E}_0^2}{3m^4c^7}\, t.$$

452. $$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{4|e|^3 v_0 E}{3mc^2 \sqrt{c^2 - v_0^2}}.$$

453. $$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^3\varphi}{3m^2c^4 l}\left(\sqrt{(e\varphi + \mathscr{E}_0)^2 - (mc^2)^2} - cp_0\right),$$

donde se han introducido las designaciones:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \qquad p_0 = \mathscr{E}_0 \frac{v_0}{c^2}.$$

454. a) $$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{\pi e^3 v_0^2 H}{mc^4 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}};$$

b) $$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \frac{\pi e^3 v_0^2 H}{3mc^4 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

donde se supone que la energía radiada es despreciablemente pequeña en comparación con la energía cinética de la partícula.

455. La energía $\mathscr{E}$ del electrón se gasta en radiación, por esto

$$-d\mathscr{E} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2c^5} \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{1}$$

donde v es el valor absoluto de la velocidad del electrón. Utilizando la fórmula (V.12) expresemos la velocidad como función de la energía $\mathscr{E}$, después de lo cual, la correlación (1) se escribirá así

$$\frac{d\mathscr{E}}{(mc^2)^2 - \mathscr{E}^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^4c^7}\, dt. \tag{2}$$

Integrando las dos partes de la igualdad (2), teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos

$$\text{Ar th}\,\frac{\mathscr{E}}{mc^2} - \text{Ar th}\,\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2} = \frac{2e^4 H^2 t}{3m^3c^5}.$$

Utilicemos la fórmula conocida de trigonometría

$$\operatorname{th}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{th}\alpha-\operatorname{th}\beta}{1-\operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\beta}$$

y representemos la energía como función evidente del tiempo

$$\mathscr{E}=mc^2\,\frac{\mathscr{E}_0+mc^2\operatorname{th}\dfrac{2e^4H^2t}{3m^3c^5}}{mc^2+\mathscr{E}_0\operatorname{th}\dfrac{2e^4H^2t}{3m^3c^5}}.$$

En el caso de que la velocidad inicial sea pequeña $v_0^2 \ll c^2$, tenemos

$$\mathscr{E}=mc^2+\frac{mv_0^2}{2}\,e^{-\frac{4e^4H^2t}{3m^3c^5}}.$$

456. $I=\dfrac{8e^2J^2v^2}{3m^2c^7r^2}\left(e\pm\dfrac{d}{r}\right)^2$, donde los signos + y — corresponden a dos direcciones del momento dipolar, a la dirección de la corriente y a la inversa.

457. La energía total radiada

$$\mathscr{E}_{\text{rad}}=\frac{2e^4}{3m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{E^2-\dfrac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,dt,$$

donde $\mathbf{E}=\dfrac{Z|e|\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{r}$ es el radio vector del electrón y $\mathbf{v}\approx\mathbf{v}_0$.

Supongamos que la trayectoria del electrón es paralela al eje X y corta el eje Y en el instante de tiempo $t=0$ (véase la fig. 10). En este caso

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[E^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2\right]dt=\frac{2Z^2e^2}{v_0}\left[\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^4}+\frac{l^2v_0^2}{c^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^6}\right],$$

donde $r^2=l^2+x^2$. La primera integral se calcula directamente

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{r^4}=\frac{\pi}{4l^3}. \qquad (1)$$

La segunda integral, en la cual en el denominador del integrando figura r de grado más elevado, se calcula diferenciando las dos partes de la igualdad (1) respecto al parámetro l. Definitivamente obtenemos

$$\mathscr{E}_{\text{rad}}=\frac{\pi}{12}\,\frac{Z^2e^6}{m^2l^3v_0c^3}\,\frac{4c^2-v_0^2}{c^2-v_0^2}.$$

458. a) $\mathscr{E}_{\text{rad}} = \dfrac{\pi}{4} \dfrac{e^4 d^2}{m^2 l^5 v_0 c\,(c^2 - v_0^2)}$;

b) $\mathscr{E}_{\text{rad}} = \dfrac{3\pi}{8} \dfrac{e^4 d^2}{m^2 l^5 v_0 c\,(c^2 - v_0^2)} \left(1 - \dfrac{3}{8} \dfrac{v_0^2}{c^2}\right)$.

459. $P_{\text{rad}} = \dfrac{\pi}{8} \dfrac{e^4 d^2}{m^2 l^5 c^3\,(c^2 - v_0^2)} \left(7 - \dfrac{15}{8} \dfrac{v_0^2}{c^2}\right)$.

460. a) $\mathscr{E}_{\text{rad}} = \dfrac{\pi}{4} \dfrac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^5 c^3\,(c^2 - v_0^2)}$;

b) $\mathscr{E}_{\text{rad}} = \dfrac{15\pi}{64} \dfrac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^5 c^3\,(c^2 - v_0^2)}$.

461. $P_{\text{rad}} = \dfrac{41\pi}{64} \dfrac{e^4 \mu^2 v_0^2}{m^2 l^5 c^5\,(c^2 - v_0^2)}$.

462. $\mathscr{E}_{\text{rad}} = \dfrac{4\pi e^4 J^2 v}{3 m^2 c^5 l\,(c^2 - v^2)}$.

463. $\dfrac{1}{\mathscr{E}} = \dfrac{1}{\mathscr{E}_0} + \dfrac{2e^4 E^2 t}{3m^4 c^7}$.

464. $\dfrac{1}{\mathscr{E}} = \dfrac{1}{\mathscr{E}_0} + \dfrac{2e^4 \mathbf{H}_\perp^2 t}{3m^4 c^7}$, donde $\mathbf{H}_\perp$ es la componente del vector H, perpendicular a la velocidad de la partícula ultrarelativista.

465. Valiéndonos de las fórmulas (V.12) y (V.16) . . . (V.18) obtenemos

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{v}} + \dfrac{1}{c^2}\,(\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}))}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathbf{vF}}{m} = \frac{\dot{\mathscr{E}}}{m} = \frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Expresemos la diferencia de cuadrados de las magnitudes (1) y (2). Después de elevar al cuadrado la suma (1) efectuamos una permutación cíclica de factores, aprovechando además la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}$. Las posteriores transformaciones de la suma total obtenida nos lleva al resultado

$$\frac{1}{m^2}\left[\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vF})^2\right] = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^2}.$$

Definitivamente

$$-\frac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^3}.$$

Esta correlación puede obtenerse también de otra manera, expresando previamente la parte derecha de la igualdad inicial (V.58) mediante el cuadrado de la aceleración cuadridimensional (V.21)

$$-\frac{d\mathscr{E}_c}{dt}=\frac{2e^2c}{3}w_i^2.$$

Abriendo el cuadrado de la 4-aceleración llegamos nuevamente a la correlación buscada.

466. $$d\mathscr{E}_\omega=\frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v}-2\right)d\omega.$$

467. Desarrollemos la exponente en serie y retengamos los tres primeros sumandos

$$\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega\frac{\mathbf{nr}_e}{c}}=\dot{\mathbf{r}}_e-\frac{i\omega}{c}\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{nr}_e)+\frac{(i\omega)^2}{2c^2}\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{nr}_e)^2.$$

Utilicemos la correlación

$$2\dot{\mathbf{r}}_e(\mathbf{nr}_e)=(\mathbf{r}_e\times\dot{\mathbf{r}}_e)\times\mathbf{n}+\frac{d}{dt}\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_e\mathbf{n})$$

y expresemos la suma obtenida en otras designaciones

$$e\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega\frac{\mathbf{nr}_e}{c}}=\dot{\mathbf{d}}-i\omega(\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{n})-\frac{i\omega}{6c}\dot{\mathbf{D}}+$$
$$+\frac{e}{2}\left(\frac{i\omega}{c}\right)^2(\mathbf{nr}_e)^2\mathbf{v}-\frac{i\omega e}{3c}(\mathbf{r}_e-\dot{\mathbf{r}}_e)\mathbf{n},$$

donde $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, μ es el momento magnético y $D_{\alpha\beta}$ el tensor del momento cuadripolar de la carga.

Consideremos que para las componentes de Fourier $\dot{f}(\omega)$ y $f(\omega)$ de cada función $f(t)$ que aquí se examina y de su derivada $\dot{f}(t)$ es válida la correlación

$$-i\omega f(\omega)=\dot{f}(\omega).$$

Entonces la fórmula inicial (V.60) para la aproximación prefijada toma la forma

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=\frac{1}{4\pi^2c^3}\left|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)\times\mathbf{n}+(\dot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6c}\dddot{\mathbf{D}}(\omega)\times\mathbf{n}+\mathbf{Q}(\omega)\times\right|^2 d\Omega d\omega,$$

donde para abreviar se ha designado

$$\mathbf{Q}(\omega)=\frac{e}{2c^2}\int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)^3(\mathbf{nr}_e)^2\mathbf{v}e^{i\omega t}\,dt.$$

Después de integrar respecto a los ángulos, se halla la composición espectral de radiación tomando en consideración los miembros de orden v^2/c^2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \left\{ \frac{2\,|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2\,|\ddot{\mu}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\dddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5} + \right.$$

$$+ \frac{e}{15\pi c^5} \left[\ddot{\mathbf{d}}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^3}{dt^3} (2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v})\, \mathbf{r}_e)\, dt + \right.$$

$$\left. \left. + \ddot{\mathbf{d}}^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d^3}{dt^3} (2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v})\, \mathbf{r}_e)\, dt \right] \right\} d\omega.$$

Si integramos respecto a la frecuencia ω obtendremos la energía total radiada

$$\mathscr{E}_{\text{rad}} = \int_{-\infty}^{\infty} I\, dt,$$

donde la intensidad de radiación tiene la forma

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\mu}^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \frac{2e}{15c^5}\, \ddot{\mathbf{d}} \frac{d^3}{dt^3} [2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v})\, \mathbf{r}_e].$$

468. Admitamos que en la fórmula general (V.64)

$$\mathbf{r}_e(t) = \mathbf{l}_z a \cos \omega_0 t, \quad n\mathbf{r}_e(t) = a \cos\theta \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 t = \varphi,$$

donde θ es el ángulo entre el eje Z y la dirección de radiación. Después de esto, la intensidad de radiación en el elemento del ángulo sólido en el promedio de tiempo para el n-ésimo armónico se escribirá:

$$dI = \frac{n^2 e^2 a^2 \omega_0^4}{2\pi c^3} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{na\omega_0}{c} \cos\theta \cos\varphi\right)} \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi \right|^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\Omega.$$

Representemos la integral que apareció en forma de una suma de dos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos\varphi)} \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{i}{2\pi x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\cos\varphi)}\, i\,(n + x \operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi -$$

$$- \frac{n}{2\pi x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\cos\varphi)}\, d\varphi.$$

La primera integral es nula en virtud de la periodicidad de la función subintegral con período 2π, mientras que la segunda se expresa mediante la función de Bessel de n-ésimo orden (siendo n un número entero):

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi + x\cos\varphi)}\, d\varphi.$$

Definitivamente hallamos

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 \omega_0^2}{2\pi c} \operatorname{tg}^2\theta J_n^2\left(\frac{n\omega_0 a}{c}\cos\theta\right) d\Omega.$$

469. Elijamos los ejes X e Y en el plano de la circunferencia haciendo además coincidir el eje Z con el eje de rotación. Las componentes del radio vector de la carga y del vector unitario de la dirección de radiación se escribirán así:

$$x_e = R\cos\omega_0 t, \quad y_e = R\operatorname{sen}\omega_0 t, \quad z_e = 0,$$
$$n_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\psi, \quad n_2 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi, \quad n_3 = \cos\theta.$$

Como resultado de promediar respecto al tiempo, la intensidad de radiación en el elemento del ángulo sólido se convierte en axialsimétrica y no depende del ángulo ψ. Por esto, para simplificar las correlaciones que aparecen, desde el principio se admite que en la fórmula inicial (V.64) $\psi = 0$. Tomando en consideración que

$$\mathbf{n}\times\mathbf{r}_e(t) = -R\omega_0(\mathbf{l}_x\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{l}_y\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \mathbf{l}_z\operatorname{sen}\theta\cos\varphi),$$
$$\mathbf{n}\mathbf{r}_e(t) = R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \varphi = \omega_0 t,$$

se obtiene para la intensidad de radiación en el elemento del ángulo sólido, en el promedio de tiempo y n-ésimo armónico, la siguiente expresión

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 R^2 \omega_0^4}{2\pi c^3}\left(\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{nv}{c}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right)}\cos\varphi\, d\varphi\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{nv}{c}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\right)}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right|^2 \cos^2\theta\right) d\Omega. \qquad (1)$$

Aprovechemos la representación integral de la función de Bessel de n-ésimo orden (siendo n un número entero). Entonces, la primera integral de la parte derecha de la igualdad (1) se expresa mediante la derivada de la función de Bessel y la segunda, mediante la propia fun-

ción de Bessel, lo mismo que en el problema anterior. Después de cálculos simples hallamos

$$dI_n = \frac{n^2e^2v^2}{2\pi R^2c}\left[\operatorname{ctg}^2\theta J_n^2\left(\frac{nv}{c}\operatorname{sen}\theta\right)+\frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\operatorname{sen}\theta\right)\right]d\Omega.$$

470. $$dI_n = \frac{n^2\omega_0^2}{2\pi c}\operatorname{tg}^2\theta\left[e_1J_n\left(\frac{na_1\omega_0}{c}\cos\theta\right)+\right.$$
$$\left.+e_2J_n\left(\frac{na_2\omega_0}{c}\cos\theta\right)\right]^2 d\Omega,$$

donde θ es el ángulo entre el eje Z y la dirección de radiación.

471. $$\mathscr{E}_{\text{lím}} = 4\left(\frac{m^2c^4l}{Qe^2}\right)^2\frac{l}{\pi}.$$

472. $$\mathscr{E}_{\text{lím}} = 4\left(\frac{m^2c^4l^2}{e^2\mu}\right)^2\frac{l}{\pi}.$$

473. $$\mathscr{E}_{\text{lím}} = \frac{64}{15}\left(\frac{m^2c^4l^2}{e^2d}\right)^2\frac{l}{\pi}.$$

474. $$\mathscr{E}_{\text{lím}} = \frac{3}{4}\left(\frac{m^2c^4}{e^2q}\right)^2\frac{l}{\pi}.$$

475. $$\mathscr{E}_{\text{lím}} = \frac{3}{4}\left(\frac{m^2c^6}{e^2J}\right)^2\frac{l}{\pi}.$$

SUPLEMENTOS

SUPLEMENTO 1

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DES ANÁLISIS VECTORIAL

Producto escalar y vectorial de vectores:

$$\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha = AB\cos(\widehat{\mathbf{AB}}), \tag{S1.1}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{l}_x & \mathbf{l}_y & \mathbf{l}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\mathbf{l}_x + $$

$$+ (A_zB_x - A_xB_z)\,\mathbf{l}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\mathbf{l}_z, \tag{S1.2}$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\,\text{sen}\,(\widehat{\mathbf{AB}}). \tag{S1.3}$$

Producto mixto y doble de vectores:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, \tag{S1.4}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \tag{S1.5}$$

Operador diferencial nabla

$$\nabla = \mathbf{l}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{l}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{l}_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{S1.6}$$

Operador de Laplace (laplaciano)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{S1.7}$$

Gradiente de la función φ:

$$\text{grad}\,\varphi \equiv \nabla\varphi = \mathbf{l}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{l}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{l}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{S1.8}$$

Correlaciones integrales en las que figura el gradiente de una función:

$$\oint_S \varphi \, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{grad} \varphi \, dV, \qquad \text{(S1.9)}$$

donde S es la superficie cerrada que limita el volumen V;

$$\oint_L \varphi \, d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \varphi) \, dS, \qquad \text{(S1.10)}$$

donde S es una superficie arbitraria tendida sobre el contorno cerrado L. La normal $\mathbf{n}$ a esta superficie está orientada en el sentido del sacacorchos al girar en dirección del recorrido del contorno L.

La derivada de la función escalar φ en la dirección del versor $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \operatorname{grad} \varphi. \qquad \text{(S1.11)}$$

La derivada del vector $\mathbf{B}$ en la dirección del versor $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{n} \operatorname{grad}) \mathbf{B} \equiv (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{B}. \qquad \text{(S1.12)}$$

La derivada del vector $\mathbf{B}$ en la dirección del vector $\mathbf{A}$, multiplicada por el módulo $|\mathbf{A}|$ de este último,

$$(\mathbf{A} \operatorname{grad}) \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \qquad \text{(S1.13)}$$

Divergencia del vector $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad \text{(S1.14)}$$

Teorema de Gauss — Ostrogradski

$$\oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV, \qquad \text{(S1.15)}$$

donde S es una superficie cerrada que limita el volumen V.

Rotacional del vector $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{l}_x & \mathbf{l}_y & \mathbf{l}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{l}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{l}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{l}_z. \qquad \text{(S1.16)}$$

Teorema de Stokes

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\mathbf{S}, \qquad \text{(S1.17)}$$

donde S es una superficie arbitraria tendida sobre un contorno cerrado L. La normal a esta superficie está orientada en el sentido del sacacorchos al girar en dirección del recorrido del contorno L.

Correlaciones integrales que figuran a menudo:

$$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A})\, dS = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dV, \qquad \text{(S1.18)}$$

$$\oint_S \operatorname{grad} \varphi\, d\mathbf{S} = \int_V \nabla^2 \varphi\, dV, \qquad \text{(S1.19)}$$

en las cuales S es una superficie cerrada que limita el volumen V, y $\mathbf{n}$ la normal exterior a esta superficie.

Fórmulas de Green

$$\oint_S \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\mathbf{S} = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi)\, dV, \qquad \text{(S1.20)}$$

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \qquad \text{(S1.21)}$$

donde S es una superficie cerrada que limita el volumen V, y $\mathbf{n}$ la normal exterior a esta superficie.

Rotacional del gradiente

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \qquad \text{(S1.22)}$$

Rotacional del rotacional

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \qquad \text{(S1.23)}$$

Divergencia del rotacional

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \qquad \text{(S1.24)}$$

Divergencia del gradiente

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi. \qquad \text{(S1.25)}$$

Derivadas de productos:

$$\operatorname{grad}(\varphi\Phi) = \varphi \operatorname{grad}\Phi + \Phi \operatorname{grad}\varphi, \quad (S1.26)$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}\operatorname{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (S1.27)$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi, \quad (S1.28)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \quad (S1.29)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot}\mathbf{A} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{A}, \quad (S1.30)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\operatorname{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\operatorname{grad})\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}. \quad (S1.31)$$

Derivadas de ciertas funciones complejas:

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = -\operatorname{grad}'|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (S1.32)$$

$$\operatorname{grad}F(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi, \quad (S1.33)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\varphi) = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi, \quad (S1.34)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(\varphi) = \operatorname{grad}\varphi\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\varphi}, \quad (S1.35)$$

$$(\mathbf{A}\operatorname{grad})\mathbf{B}(\varphi) = (\mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi)\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\varphi}. \quad (S1.36)$$

Expresiones relacionadas con el gradiente, la divergencia, el rotacional y el operador de Laplace en el sistema de coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\operatorname{sen}\psi, \quad z = z,$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{l}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\mathbf{l}_\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{l}_z, \quad (S1.37)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (S1.38)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right)\mathbf{l}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{l}_\psi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)\mathbf{l}_z, \quad (S1.39)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad (S1.40)$$

$$\nabla^2 F(r) = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right), \quad (S1.41)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right) \mathbf{l}_r + \left(\nabla^2 A_\psi - \frac{A_\psi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right) \mathbf{l}_\psi + \nabla^2 A_z \mathbf{l}_z. \quad \text{(S1.42)}$$

Expresiones relacionadas con el gradiente, la divergencia, el rotacional y el operador de Laplace en el sistema de coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \psi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{l}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{l}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \mathbf{l}_\psi, \quad \text{(S1.43)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial 0} (\operatorname{sen} \theta A_\theta) +$$

$$+ \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}, \quad \text{(S1.44)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right] \mathbf{l}_r +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) \right] \mathbf{l}_\theta +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{l}_\psi, \quad \text{(S1.45)}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}; \quad \text{(S1.46)}$$

$$\nabla^2 F(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rF), \quad \text{(S1.47)}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} =$$

$$= \left\{ \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \left[A_r + \frac{1}{\operatorname{sen} 0} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right] \right\} \mathbf{l}_r +$$

$$+ \left[\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \operatorname{sin}^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sin}^2 \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right) \right] \mathbf{l}_\theta +$$

$$+ \left[\nabla^2 A_\psi + \frac{2}{r^2 \operatorname{sin} \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \psi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} - \frac{A_\psi}{2 \operatorname{sin} \theta} \right) \right] \mathbf{l}_\psi. \quad \text{(S1.48)}$$

MATRICES Y TENSORES

El conjunto de números $a_{\alpha\beta}$ representados en forma de tabla

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{a} \tag{S2.1}$$

se denomina matriz $\hat{a}$, mientras que los propios números $a_{\alpha\beta}$ se llaman elementos matriciales. Si el número de estos elementos en cada fila y columna de la matriz es igual, ésta se denomina cuadrada.

Al adicionar las matrices $\hat{a}$ y $\hat{b}$, los elementos homónimos de éstas se suman, por lo tanto en la matriz $\hat{c}$ de la suma

$$\hat{c} = \hat{a} + \hat{b} \tag{S2.2}$$

figuran los siguientes elementos matriciales:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}. \tag{S2.3}$$

Se denomina producto $\hat{a}\hat{b}$ de las matrices $\hat{a}$ y $\hat{b}$ a otra matriz $\hat{c}$ tal para la cual los elementos matriciales se determinan como

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}. \tag{S2.4}$$

Corrientemente $\hat{a}\hat{b} \neq \hat{b}\hat{a}$. En caso de que $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$ las matrices se denominan conmutativas.

El factor c, común para todos los elementos matriciales se puede sacar del símbolo de la matriz

$$\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{S2.5}$$

Los elementos matriciales de la matriz unidad

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{S2.6}$$

se designan con el símbolo de Kronecker

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad \alpha = \beta, \\ 0 & \text{para} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{S2.7}$$

La matriz inicial $\hat{a}$ no varía al multiplicarla por la matriz unidad $\hat{a}\hat{I} = \hat{I}\hat{a} = \hat{a}$.

Si el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\hat{a}| \tag{S2.8}$$

de la matriz $\hat{a}$ difiere de cero, entonces existe una matriz inversa $\hat{a}^{-1}$, tal que

$$\hat{a}^{-1}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{-1} = \hat{I}, \tag{S2.9}$$

$$a^{-1}_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = a_{\alpha\gamma} a^{-1}_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{S2.10}$$

Los elementos de la matriz inversa $\hat{a}^{-1}$ tienen la forma

$$a^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{A_{\beta\alpha}}{|\hat{a}|}, \tag{S2.11}$$

donde $A_{\beta\alpha}$ es el complemento algebraico (adjunto) del elemento $a_{\beta\alpha}$ del determinante de la matriz (S2.8).

La matriz $\hat{a}^t$ que resulta de la inicial $\hat{a}$ mediante la sustitución de filas por columnas se denomina traspuesta

$$a^t_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{S2.12}$$

Las matrices simétrica $\hat{s}$ y antisimétrica $\hat{a}$ poseen las siguientes particularidades

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \tag{S2.13}$$

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}. \tag{S2.14}$$

Una matriz cuadrada arbitraria $\hat{b}$ puede descomponerse en la suma de matrices simétrica y antisimétrica

$$\hat{b} = 1/2\,(\hat{b} + \hat{b}^t) + 1/2\,(\hat{b} - \hat{b}^t) \tag{S2.15}$$

o de otra forma

$$b_{\alpha\beta} = 1/2\,(b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha}) + 1/2\,(b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha}). \tag{S2.16}$$

La matriz diagonal se define por la expresión

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad \text{(S2.17)}$$

Las componentes x_1, x_2 y x_3 del radio vector en un espacio tridimensional euclidiano al pasar del sistema de coordenadas XYZ al sistema de coordenadas giradas $X'Y'Z'$ se transforman acorde con la fórmula

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad \text{(S2.18)}$$

donde x'_1, x'_2 y x'_3 son las componentes del mismo radio vector en el sistema de coordenadas girado, mientras que los coeficientes $a_{\alpha\beta}$ representan de por sí los cosenos de los ángulos entre el β-eje del sistema inicial y el α-eje del sistema girado de coordenadas cartesianas. El conjunto de coeficientes $a_{\alpha\beta}$ constituyen la matriz de transformación lineal de coordenadas al pasar del sistema inicial al girado. El paso inverso se lleva a cabo mediante la matriz inversa (S2.11).

La transformación lineal de coordenadas tipo (S2.18) se denomina ortogonal si la matriz $a_{\alpha\beta}$ de dicha transformación satisface la condición $a^{-1}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Un ejemplo de semejante transformación puede ser el paso de un sistema de coordenadas cartesiano a otro cualquiera girado.

Se denomina vector A_β al conjunto de tres magnitudes A_1, A_2 y A_3 las cuales al efectuar una transformación ortogonal de coordenadas se modifican como componentes del radio vector*)

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta, \qquad \text{(S2.19)}$$

donde las tres magnitudes A'_1, A'_2 y A'_3 representan de por sí las componentes del mismo vector en el sistema de coordenadas con tilde.

Se denomina tensor de segundo rango al conjunto de nueve magnitudes $T_{\gamma\delta}$ las cuales, al efectuar una transformación ortogonal de coordenadas, se modifican como producto de las componentes del radio vector

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta}, \qquad \text{(S2.20)}$$

*) Se examinan solamente las bases ortonormalizadas del espacio tridimensional euclidiano, por tanto no hay necesidad de introducir las componentes covariantes y contravariantes del vector.

donde $T'_{\alpha\beta}$ son las componentes del mismo tensor en el sistema de coordenadas con tilde.

De forma semejante se define el tensor de n-ésimo rango, en el cual las magnitudes $T_{\alpha\beta\gamma}\ldots$ tienen n cantidad de subíndices. En particular, para $n = 3$ se tiene

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\delta}a_{\beta\sigma}a_{\gamma\rho}T_{\delta\sigma\rho} \qquad \text{(S2.21)}$$

Después de introducir la noción de tensor el vector ordinario (S2.19) puede examinarse como un tensor de primer rango. La magnitud cuyo valor numérico no varía al girar el sistema de coordenadas se denomina escalar o tensor de rango nulo. Como ejemplo de un escalar se puede citar el producto de vectores.

Junto con la rotación del sistema de coordenadas existe otra transformación ortogonal de las mismas, basada en el cambio simultáneo de los signos en todas las coordenadas (inversión). Esto no es otra cosa más que el traspaso al sistema de coordenadas izquierdo en el cual todos los ejes están orientados en dirección opuesta respecto al sistema inicial.

En caso de que la magnitud escalar y el vector cambien el signo al invertirlos, éstos se denominan respectivamente seudoescalar y vector polar, y si lo conservan, entonces, magnitud absoluta y vector axial.

El tensor absoluto de n-ésimo rango al invertirlo se multiplica por $(-1)^n$, mientras que el seudotensor por $(-1)^{n+1}$.

El tensor $T_{\alpha\beta}$ de segundo rango a veces se escribe, por analogía con la matriz (S2.1), en forma de tabla

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \qquad \text{(S2.22)}$$

Por esto, todo lo expuesto sobre la adición y multiplicación de matrices (S2.2)... (S2.11) se refiere así mismo a los tensores de segundo rango. Quedan en vigor y las definiciones (S2.13) — (S2.17) para los tensores simétrico, antisimétrico y diagonal.

El tensor $T^s_{\alpha\beta}\ T^a_{\beta\gamma}$, obtenido mediante la multiplicación escalar del tensor simétrico $T^s_{\alpha\beta}$ por el antisimétrico $T^a_{\beta\gamma}$, posee una propiedad importante

$$T^s_{\alpha\beta}T^a_{\beta\alpha} = 0. \qquad \text{(S2.23)}$$

La suma de las componentes diagonales $T_{\alpha\alpha}$ del tensor $T_{\alpha\beta}$ se denomina traza del mismo. La traza del tensor es una magnitud escalar. En general, al contraer el tensor $T_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots}$ respecto a dos cualesquiera de sus índices, por ejemplo $T_{\alpha\alpha\gamma\delta\ldots}$, resulta un tensor nuevo cuyo rango es menor en dos unidades.

Como resultado de la multiplicación escalar del tensor $T_{\alpha\beta}$ por el vector A_β se obtiene otro vector

$$B_\alpha = T_{\alpha\beta}A_\beta. \qquad \text{(S2.24)}$$

Se denomina seudotensor unitario de tercer rango completamente antisimétrico al conjunto de 27 magnitudes $e_{\alpha\beta\gamma}$, que cambian su signo al permutar dos subíndices cualesquiera. Difieren de cero solamente aquellas componentes de este tensor cuyos subíndices α, β y γ se diferencian. En este caso $e_{123} = 1$, mientras que las demás componentes diferentes de cero resultan iguales a 1 ó -1, según sea, par o impar, el número de permutaciones que conllevan la secuencia dada de números $\alpha\beta\gamma$ a la sucesión 123. El tensor $e_{\gamma\beta\gamma}$, así como el tensor unitario $\delta_{\alpha\beta}$, se destacan de otros por tener una misma forma en todos los sistemas de coordenadas cartesianos.

Mediante el tensor $e_{\alpha\beta\nu}$ el producto vectorial de vectores puede ser escrito de la siguiente forma

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma. \qquad \text{(S2.25)}$$

Son útiles también las siguientes fórmulas:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}$$

donde la parte derecha de la última igualdad representa de por sí un determinante compuesto por símbolos de Kronecker (S2.7).

SUPLEMENTO 3

FUNCIÓN DELTA

Se denomina δ-función (función delta) a tal función $\delta(x - x_0)$, la cual es nula por doquier, salvo un punto especial $x = x_0$, donde ésta se convierte en infinito de tal forma que la integral de esta función respecto a un intervalo arbitrario, que contenga en su interior el punto x_0, es equivalente a la unidad

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \neq x_0, \\ \infty & \text{para} \quad x = x_0; \end{cases} \tag{S3.1}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = 1 \quad \text{para} \quad a < x_0 < b. \tag{S3.2}$$

Las propiedades principales de la δ-función se expresan por las igualdades:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=\begin{cases} f(x_0) & \text{para} \quad a < x_0 < b, \\ 0 & \text{para} \quad x_0 < a \ \text{ó} \ b < x_0, \end{cases} \tag{S3.3}$$

$$f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)\,\delta(x-x_0), \tag{S3.4}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)\,dx = \delta(x_1-x_2) \quad \text{para} \quad a < x_1 < b$$

$$\text{o para} \quad a < x_2 < b, \tag{S3.5}$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{S3.6}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{S3.7}$$

$$|x|\,\delta(x^2-\varepsilon) = \delta(x) \quad \text{para} \quad \varepsilon \to +0, \tag{S3.8}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x), \tag{S3.9}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\,[\delta(x-a)+\delta(x+a)], \tag{S3.10}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\left|\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_n}\right|}\,\delta(x-x_n), \tag{S3.11}$$

donde las magnitudes x_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) son simples raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en la cual $f(x)$ es una función

unívoca diferenciable. En las fórmulas (S3.3) y (S3.4) la función $f(x)$ es continua. Las correlaciones presentadas (S3.4)... (S3.11) hay que concebirlas en el sentido de que la integral en las dos partes de las igualdades escritas tiene un mismo significado.

En vista de que $\delta(x)$ es una función par, entonces, a partir de las correlaciones (S3.2) y (S3.3) para $a = -b < 0$ y $x_0 = 0$ se deducen las igualdades

$$\int_0^b \delta(x)\,dx = 1/2, \tag{S3.12}$$

$$\int_0^b f(x)\,\delta(x) = 1/2\,f(0). \tag{S3.13}$$

El cálculo de la integral que contiene la derivada $\frac{d}{dx}\delta(x - x_0)$ de la δ-función, se efectúa integrando por partes:

$$\int_a^b f(x)\,\frac{d}{dx}\,\delta(x - x_0)\,dx = -\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}, \tag{S3.14}$$

donde $a < x_0 < b$. Un caso particular importante de esta fórmula a veces se escribe así:

$$x\,\frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x). \tag{S3.15}$$

De forma semejante se calcula la integral que contiene derivadas de grados superiores de la δ-función

$$\int_a^b f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}\,\delta(x - x_0)\,dx = (-1)^n\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)_{x=x_0}. \tag{S3.16}$$

Existen diversas representaciones analíticas de la δ-función. Las más difundidas de éstas tienen la siguiente forma:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\operatorname{sen} Lx}{x}, \tag{S3.17}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{Lx^2}, \tag{S3.18}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \to 0} \frac{\nu}{\nu^2 + x^2}, \tag{S3.19}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\mu \to \infty} \mu e^{-\mu^2 x^2}. \tag{S3.20}$$

Si las δ-funciones (S3.17)... (S3.20) se encuentran en el integrando el paso límite se realiza después de calcular la integral.

La δ-función puede obtenerse también diferenciando una función escalonada

$$\eta(x - x_0) = \begin{cases} 1 \text{ para } x > x_0, \\ 0 \text{ para } x < x_0, \end{cases} \tag{S3.21}$$

por ejemplo:

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \eta(x - x_0). \tag{S3.22}$$

Relacionado con esto, la derivada de una función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ para } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ para } x > x_0, \end{cases} \tag{S3.23}$$
$$f_2(x_0) - f_1(x_0) = h$$

a menudo se escribe en forma

$$\frac{df(x)}{dx} = h\delta(x - + x_0) \begin{cases} \frac{df_1(x)}{dx} \text{ para } x < x_0 \\ \frac{df_2(x)}{dx} \text{ para } x > x_0. \end{cases} \tag{S3.24}$$

Una noción evidente sobre la δ-función y su propiedad fundamental (S3.3) puede obtenerse examinando, por ejemplo, el gráfico de la función $\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{\pi Lx^2}$ para valores grandes del parámetro $L \gg 2\pi$ (fig. 28). Efectivamente, en este caso el pico máximo, en forma de cúpula, situado en el punto $x = 0$ es el principal. La altura de éste es L/π y la anchura en la base $2\pi/L$. Esta última magnitud se denomina anchura del pico máximo. A los dos lados del pico máximo principal la función $\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{\pi Lx^2}$ tiene una serie ilimitada de picos colaterales con altitudes rápidamente decrecientes. Dichos

picos están divididos entre sí por mínimos en los puntos $x = n\pi/L$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Si el parámetro L tiende al infinito el pico máximo principal aumenta ilimitadamente y se estrecha, mientras que los picos máximos colaterales van decreciendo continuamente. Como resultado la función $\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{\pi Lx^2}$ para $L \to \infty$ tiende a la expresión límite (S3.1).

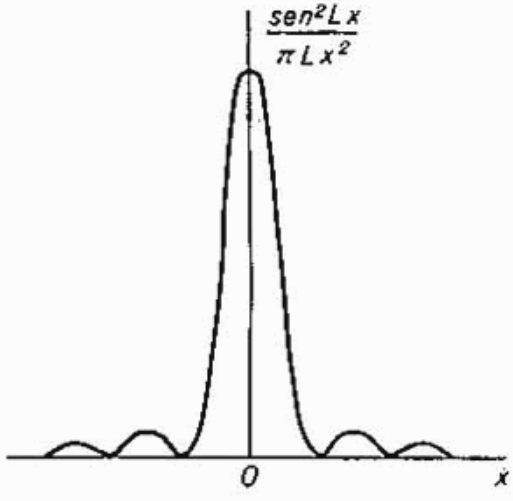


Fig. 28

Para una función arbitraria continua $f(x)$, siendo el valor del parámetro L bastante grande, la región principal de integración en la integral

$$\int_a^b f(x)\,\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{\pi Lx^2}\,dx \quad \text{para} \quad a < 0 < b$$

coincide con la anchura del pico máximo principal de la función $\frac{\operatorname{sen}^2 Lx}{\pi Lx^2}$. La función continua $f(x)$ en el integrando en la región del pico máximo puede ser sustituida por su valor en el punto $x = 0$. Esta sustitución será tanto más precisa cuanto mayor sea el parámetro L y, por consiguiente, más elevado y estrecho el punto máximo principal. El factor constante $f(0)$ se saca fuera de la integral, mientras que el remanente de ésta en el límite $L \to \infty$ es equivalente a la unidad. De aquí se obtiene la principal propiedad de la δ-función (S3.3), para el caso $x_0 = 0$.

La δ-función tridimensional se define por la correlación

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0). \qquad \text{(S3.25)}$$

La propiedad principal de esta función se caracteriza con la igualdad

$$\int_V f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV=f(\mathbf{r}_0), \qquad \text{(S3.26)}$$

donde el punto con radio vector $\mathbf{r}_0$ se encuentra dentro del volumen de integración V, en el cual se ha prefijado la función continua $f(\mathbf{r})$. En caso de que el punto indicado se encuentre fuera del volumen V la integral (S3.26) es nula.

La δ-función tridimensional resulta cómodo representarla en forma de integral triple en un espacio $\mathbf{k}$ ilimitado

$$\delta(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}d\mathbf{k}. \qquad \text{(S3.27)}$$

Dicha función aparece, por ejemplo, como resultado de la siguiente diferenciación respecto de las componentes del radio vector $\mathbf{r}$:

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad \text{(S3.28)}$$

SUPLEMENTO 4

POLINOMIOS DE LEGENDRE

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial (véase los manuales [7—9])

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right]+n(n+1)P_n=0, \qquad \text{(S4.1)}$$

donde $-1\leqslant x\leqslant 1$ y $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Unos cuantos primeros polinomios con subíndices $n=0,\ 1,\ 2$ y 3 tienen la forma

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=1/2\,(3x^2-1),$$
$$P_3(x)=1/2\,(5x^3-3x). \qquad \text{(S4.2)}$$

El polinomio de Legendre de n-ésimo grado puede calcularse por la fórmula

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \qquad \text{(S4.3)}$$

Los polinomios de Legendre poseen las siguientes propiedades:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \tag{S4.4}$$

$$P_n(1) = 1, \tag{S4.5}$$

$$P_{2k+1}(0) = 0, \tag{S4.6}$$

$$P_{2k}(0) = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}, \tag{S4.7}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \tag{S4.8}$$

$$\int_{0}^{1} P_{2k+1}(x)\, dx = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!}, \tag{S4.9}$$

$$\int_{0}^{1} P_{2k}(x)\, dx = \delta_{k0}. \tag{S4.10}$$

Si los subíndices n y m son simultáneamente pares o impares, entonces se observa la igualdad

$$\int_{0}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}. \tag{S4.11}$$

Para los polinomios son justas las fórmulas recurrentes:

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0, \tag{S4.12}$$

$$(x^2 - 1) P'_n(x) = n x P_n(x) - n P_{n-1}(x), \tag{S4.13}$$

$$P'_{n+1}(x) - x P'_n(x) = (n+1) P_n(x), \tag{S4.14}$$

donde el tilde significa la derivada de la función $P_n(x)$ respecto del argumento x.

Los polinomios de Legendre forman en el intervalo $[-1, 1]$ un sistema completo de funciones ortogonales. Por esto, la función arbitraria $f(x)$ dos veces diferenciable, dada en este intervalo, se puede desarrollar en serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \tag{S4.15}$$

donde

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx. \qquad \text{(S4.16)}$$

Con frecuencia, en calidad de argumento de los polinomios de Legendre se usa $x = \cos\theta$. En este caso, en las integrales (S4.8)... (S4.11) y (S4.16) es menester sustituir la variable de integración y entonces la ecuación de Legendre (S4.1) obtendrá la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + \\ + n(n+1)\,P_n(\cos\theta) = 0. \qquad \text{(S4.17)}$$

Comparando la parte izquierda de (S4.17) con el operador de Laplace en coordenadas esféricas (S1.46) se obtienen para $r \neq 0$ correlaciones útiles

$$\nabla^2 P_n(\cos\theta) = -\frac{n(n+1)}{r^2}\,P_n(\cos\theta), \qquad \text{(S4.18)}$$

$$\nabla^2\left(r^n P_n(\cos\theta)\right) = 0,\quad \nabla^2\left(\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = 0. \qquad \text{(S4.19)}$$

De aquí se deduce que la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ es así mismo la suma de los polinomios de Legendre con coeficientes arbitrarios a_n y b_n:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n + b_n r^{-n-1}\right) P_n(\cos\theta). \qquad \text{(S4.20)}$$

SUPLEMENTO 5

FUNCIONES ESFÉRICAS

Las funciones esféricas $Y_{lm}(\theta, \Psi)$ se definen por las fórmulas*)

$$Y_{lm}(\theta, \psi) = \\ = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\psi}, \qquad \text{(S5.1)}$$

*) La selección del factor regulador está en correspondencia con la definición de la función esférica adoptada en la mecánica cuántica [10].

donde $-l \leqslant m \leqslant l$ y $l = 0, 1, 2, \ldots$, mientras que $P_l^m(\cos\theta)$ son los polinomios adjuntos de Legendre

$$P_l^m(\cos\theta) = \operatorname{sen}^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}. \qquad \text{(S5.2)}$$

Expongamos las primeras nueve funciones esféricas:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\psi}, \qquad \text{(S5.3)}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1 - 3\cos^2\theta),$$

$$Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\, e^{\pm i\psi},$$

$$Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\operatorname{sen}^2\theta\, e^{\pm i2\psi}. \qquad \text{(S5.4)}$$

Las funciones esféricas $Y_{lm}(\theta, \Psi)$ son soluciones limitadas de la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dY_{lm}}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)Y_{lm} = 0. \qquad \text{(S5.5)}$$

Por esto, al influir el operador de Laplace en coordenadas esféricas sobre la función $Y_{lm}(\theta, \Psi)$, esta última se reproduce:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \psi) = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm}(\theta, \psi), \qquad \text{(S5.6)}$$

donde $r \neq 0$.

Entre la multitud de propiedades que poseen las funciones esféricas destaquemos solamente aquellas que se utilizan en esta recopilación de problemas.*) Las funciones esféricas son, en la superficie de una esfera con radio unitario, ortogonales

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \psi)\, Y_{l'm'}(\theta, \psi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \qquad \text{(S5.7)}$$

*) Nociones más detalladas sobre funciones esféricas se pueden hallar en los libros [7, 9].

donde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi$ es un elemento del ángulo sólido. Para $m = 0$ la función esférica se expresa mediante el polinomio de Legendre

$$Y_{l0} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \qquad \text{(S5.8)}$$

y no depende del ángulo azimutal ψ. A las funciones Y_{l0} conllevan las siguientes correlaciones integrales:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta, \psi)\, d\psi = 2\pi\delta_{0m} Y_{l0}, \qquad \text{(S5.9)}$$

$$\int_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta, \psi)\, Y_{l'm'}(\theta, \psi)\, d\psi = 2\pi\delta_{mm'} Y^*_{l0} Y_{l'0}. \qquad \text{(S5.10)}$$

Para calcular el potencial son extremadamente útiles las siguientes descomposiciones en funcioes esféricas:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta, \psi)\, Y_{lm}(\theta', \psi') \quad (r > r') \qquad \text{(S5.11)}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \psi')\, Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (r' > r), \qquad \text{(S5.12)}$$

donde r, θ y ψ son las coordenadas esféricas del punto con radio vector $\mathbf{r}$. Con tilde están señaladas las magnitudes semejantes que se refieren a otro punto del espacio.

SUPLEMENTO 6

FUNCIONES CILÍNDRICAS

Las funciones cilíndricas $Z_\nu(x)$ son soluciones de las ecuaciones de Bessel

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dZ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu = 0, \qquad \text{(S6.1)}$$

donde $0 \leqslant x \leqslant \infty$ y ν es cierto parámetro.

Una solución limitada $J_\nu(x)$ de la ecuación (S6.1) se denomina función de Bessel de ν-ésimo orden o función cilíndrica de primer género

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad \text{(S6.2)}$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma la cual para $\operatorname{Re} s > 0$ se define por la fórmula

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{s-1}\, d\xi. \qquad \text{(S6.3)}$$

Las principales propiedades de la función gamma

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0) = \infty. \qquad \text{(S6.4)}$$

En el caso de que $n = s$, donde n es un número natural, entonces, a partir de la correlación (S6.4) se deduce que $\Gamma(n+1) = n!$ y $\Gamma(-n) = (-1)^n \cdot \infty$.

La segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel se transforma en infinito en el punto $x = 0$. En caso de que el parámetro ν no sea igual a un número entero, entonces, como solución sirve la función $J_{-\nu}(x)$, o la función de Neumann

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \pi\nu}, \qquad \text{(S6.5)}$$

la cual la denominan también función cilíndrica de segundo género.

En caso de valores enteros $\nu = n$, así como para $\nu = 0$ se observa la correlación $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ de la cual es evidente que las funciones $J_{-n}(x)$ y $J_n(x)$ son de dependencia lineal. Por esto, para $\nu = n$ o $\nu = 0$, en calidad de segunda solución con independencia lineal de la ecuación de Bessel se toma la función de Neumann

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \pi\nu} \qquad \text{(S6.6)}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

Para la función de Bessel de orden entero n a veces es útil valerse de la representación integral

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \operatorname{sen} \varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)}\, d\varphi. \qquad \text{(S6.7)}$$

A causa de la periodicidad de las funciones sen φ, cos φ y $e^{in\varphi}$ la integración en (S6.7) puede realizarse respecto de cualquier intervalo comprendido entre φ_0 y $\varphi_0 + 2\pi$, donde φ_0 es un número real arbitrario y $n = 0, 1, 2, \ldots$

En calidad de solución de la ecuación de Bessel se usan también las funciones cilíndricas de tercer género (funciones de Hankel)

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad \text{(S6.8)}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \qquad \text{(S6.9)}$$

Aquí $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$ son funciones de Hankel de primer y segundo género de rango ν. Estas últimas a menudo se escriben en forma de integrales

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t + ix \operatorname{ch} t}\, dt, \qquad \text{(S6.10)}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - ix \operatorname{ch} t}\, dt, \qquad \text{(S6.11)}$$

en las cuales el parámentro ν y la magnitud variable x pueden adquirir valores complejos si se examinan las prolongaciones analíticas de dichas funciones en un plano complejo [8, 9].

Las funciones cilíndricas de primer, segundo y tercer género son linealmente independientes, así que la solución general de las ecuaciones de Bessel pueden ser representadas en forma de una combinación lineal con coeficientes arbitrarios de cualesquiera dos funciones cilíndricas mencionadas.

Señalemos algunas particularidades de las funciones cilíndricas:

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Z_{\nu}(x), \qquad \text{(S6.12)}$$

$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2\frac{dZ_{\nu}(x)}{dx}, \qquad \text{(S6.13)}$$

$$\frac{dZ_0(x)}{dx}=-Z_1(x), \qquad \text{(S6.14)}$$

$$\int_0^x \xi Z_0(\xi)\,d\xi = xZ_1(x), \qquad \text{(S6.15)}$$

donde en calidad de función cilíndrica $Z_\nu(x)$ puede ser elegida cualesquiera de las funciones $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$.

Expresiones aproximadas de funciones cilíndricas, siendo pequeños los valores del argumento $|x| \ll 1$:

$$J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \qquad \text{(S6.16)}$$

$$N_n(x)=-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \text{ para } n\geqslant 1, \qquad \text{(S6.17)}$$

$$N_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right), \qquad \text{(S6.18)}$$

donde $C = 0{,}5772$. Una forma aproximada de las funciones de Hankel se obtiene de las fórmulas (S6.8) y (S6.9) mediante las correlaciones (S6.16)... (S6.18).

Expresiones asintóticas, siendo considerables los valores del argumento $|x| \gg 1$:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{(S6.19)}$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{(S6.20)}$$

pudiéndose obtener las respectivas expresiones para las funciones de Hankel a partir de las correlaciones (S6.8) y (S6.9), considerando las fórmulas (S6.19) y (S6.20).

Al resolver muchos problemas físicos se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dy}{dr}+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)y=0, \qquad \text{(S6.21)}$$

cuya solución corrientemente se expresa mediante las funciones de Bessel $J_\nu(\lambda r)$ y de Neumann $N_\nu(\lambda r)$ del argumento $x = \lambda r$:

$$y = c_1 J_\nu(\lambda r) + c_2 N_\nu(\lambda r), \qquad \text{(S6.22)}$$

donde las constantes arbitrarias c_1 y c_2 se determinan de las condiciones de frontera para la ecuación (S6.21), mientras que el parámetro ν puede adquirir valores numéricos enteros.

La función $f(r)$, continua en el intervalo $(0, \infty)$, puede desarrollarse en integral de Fourier — Bessel

$$f(r) = \int_0^\infty c_\lambda J_n(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda, \qquad \text{(S6.23)}$$

donde n es un número entero o cero y el coeficiente de desarrollo c_λ se da por la integral

$$c_\lambda = \int_0^\infty f(r)\, J_n(\lambda r)\, r\, dr. \qquad \text{(S6.24)}$$

Las funciones de Bessel $J_n(\lambda r)$ y $J_n(\lambda' r)$ con diversos valores del parámetro λ son ortogonales en el sentido siguiente:

$$\int_0^\infty J_n(\lambda r)\, J_n(\lambda' r)\, r\, dr = \frac{1}{\lambda}\, \delta(\lambda - \lambda'). \qquad \text{(S6.25)}$$

Para que el desarrollo de Fourier—Bessel se pueda realizar, la función $f(r)$ tiene que ser contínua a trozos con un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito de variación del argumento r y, además de esto, tiene que converger en absoluto la integral

$$\int_0^\infty f(r) \sqrt{r}\, dr. \qquad \text{(S6.26)}$$

CÁLCULO TENSORIAL EN ESPACIO SEUDOEUCLIDIANO

Un acontecimiento se caracteriza habitualmente por las coordenadas x, y, z y el tiempo t. Se denomina intervalo entre dos acontecimientos x_1, y_1, z_1, t_1 y x_2, y_2, z_2, t_2, a la magnitud S_{21} cuyo cuadrado se da por la expresión

$$S_{21}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \qquad \text{(S7.1)}$$

Conforme a los postulados fundamentales de la teoría de la relatividad el intervalo entre dos acontecimientos semejantes tiene, en todos los sistemas de referencia inerciales, un mismo aspecto y valor numérico. Dicho con otras palabras, la forma cuadrática (S7.1) es invariante, o sea, no depende de la elección del sistema de referencia inercial.

A causa de esto, resulta conveniente unificar el espacio tridimensional corriente y el tiempo en un espacio cuadridimensional, cada punto del cual se caracteriza por el 4-radio vector x^i con las componentes

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \qquad \text{(S7.2)}$$

En este espacio cuadridimensional el cuadrado de la distancia entre dos puntos se define por la forma cuadrática (S7.1), mientras que el 4-radio vector es

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = g_{ik} x^i x^k, \qquad \text{(S7.3)}$$

donde g_{ik} es el tensor métrico

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(S7.4)}$$

El primer índice $i = 0, 1, 2, 3$ numera las filas en la tabla (S7.4) y el segundo k las columnas. Bajo los índices «mudos» que se repiten, uno de los cuales se escribe arriba (supraíndice) y otro abajo (subíndice), se sobreentiende en todas partes la suma desde 0 hasta 3. El espacio con métrica (S7.3) se denomina seudocuclidiano.

Al pasar a otro sistema de coordenadas cuadridimensional, las componentes del 4-radio vector (S7.2) se transforman conforme a la fórmula

$$x^i = a^i_k x'^k, \tag{S7.5}$$

donde el conjunto de coeficientes a^i_k compone la matriz de transformación lineal que describe la transición del sistema de coordenadas con tilde al de sin ésta. El supraíndice del coeficiente a^i_k designa el número de la fila y el subíndice la columna de esta matriz.

El paso inverso al sistema de coordenadas iniciales se efectúa a base de la fórmula

$$x'^i = \bar{a}^i_k x^k, \tag{S7.6}$$

donde el conjunto de coeficientes $\bar{a}^i_k$ compone tal matriz de transformación inversa, que

$$\bar{a}^i_l a^l_k = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k, \\ 0 & \text{para } i \neq k. \end{cases} \tag{S7.7}$$

En virtud de que la transición a otro sistema de coordenadas en el espacio cuadridimensional que se examina no varía la forma cuadrática (S7.3), las matrices de transformación (S7.5) y (S7.6) satisfacen las correlaciones

$$g_{ik} a^i_l a^k_m = g_{lm}, \quad g_{ik} \bar{a}^i_l \bar{a}^k_m = g_{lm}. \tag{S7.8}$$

Al paso de un sistema inercial de referencia a otro (fig. 8) le corresponde, en un espacio cuadridimensional, la transición de un sistema de coordenadas a otro, girado respecto al primero en cierto ángulo en el plano X^0X^1. La transformación de las componentes del 4-radio vector que responde a dicha rotación se denomina transformación de Lorentz. Esta se expresa por la fórmula (S7.5), en la cual la matriz de transformación tiene la forma

$$a^i_k = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \dfrac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{S7.9}$$

La matriz de transformación inversa de Lorentz se obtiene a partir de (S7.9) cambiando el signo delante de la velocidad V por el opuesto.

Se denomina vector cuadridimensional A^i (4-vector) el conjunto de cuatro magnitudes A^0, A^1, A^2 y A^3 las cuales, al pasar de un sistema de coordenadas cuadridimensional a otro, se transforman como las componentes de un 4-radio vector,

$$A^i = a^i_k A'^k, \quad A'^i = \bar{a}^i_k A^k. \tag{S7.10}$$

Por semejanza con el 4-radio vector (S7.2) la primera componente A^0 del 4-radio vector A^i se denomina temporal, mientras que las restantes: A^1, A^2 y A^3 — espaciales. Estas componentes a veces se expresan en una forma explícita, introduciendo las siguientes designaciones para el 4-vector:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}). \tag{S7.11}$$

Lo mismo que en el caso del 4-radio vector, la forma cuadrática

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2, \tag{S7.12}$$

donde figuran las componentes de todo 4-vector A^i, es invariante y se denomina cuadrado del 4-vector. Este puede ser positivo, negativo o nulo. Tales 4-vectores se denominan respectivamente temporales, espaciales y nulos.

En un espacio seudoeuclidiano para comodidad se introducen dos variedades de componentes del 4-vector. Con el índice superior A^i se designan las componentes contravariantes del 4-vector y con el inferior A_i las covariantes de este mismo 4-vector, que de por sí son

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \tag{S7.13}$$

Las componentes covariantes, así como las contravariantes del 4-vector, están relacionadas entre sí mediante los tensores métricos, covariante g_{ik} y contravariante g^{ik}, de la siguiente manera:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \tag{S7.14}$$

Así pues, un mismo vector puede representarse por sus componentes contravariantes o covariantes

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}), \quad A_i = (A^0, -\mathbf{A}). \tag{S7.15}$$

Después de esto, el cuadrado del 4-vector (S7.12) se escribirá así

$$A_0A^0 + A_1A^1 + A_2A^2 + A_3A^3 = A_iA^i. \quad \text{(S7.16)}$$

El producto escalar de dos 4-vectores A_i y B^i por semejanza con la expresión (S7.16) se define en forma de

$$A_iB^i = A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3. \quad \text{(S7.17)}$$

Un mismo producto escalar puede escribirse de varias formas:

$$A_iB^i = A^iB_i = g_{ik}A^iB^k = g^{ik}A_iB_k = \\ = A_0B^0 - \mathbf{AB} = A^0B_0 - \mathbf{AB}. \quad \text{(S7.18)}$$

Se denomina escalar cuadridimensional (4-escalar) a la magnitud que no modifica su forma ni el valor numérico al pasar a cualquier sistema de coordenadas cuadridimensional girado. Por ejemplo, el producto escalar de 4-vectores es invariante respecto a cualquiera rotación del sistema de coordenadas cuadridimensional, y por consiguiente, con relación a la transformación de Lorentz. Esto quiere decir que el producto escalar de 4-vectores es un escalar cuadridimensional.

En vista de que el cuadrado del 4-radio vector x_kx^k es 4-escalar las componentes covariantes x_k del 4-radio vector al pasar a otro sistema de coordenadas cuadridimensional se transforman acorde con la ley

$$x_k = x'_i\bar{a}^i_k, \quad x'_k = x_la^i_k, \quad \text{(S7.19)}$$

donde los coeficientes a^i_k y $\bar{a}^i_k$ figuran en las mismas matrices que en el caso de transformación de las componentes contravariantes (S7.5) y (S7.6). Las componentes covariantes de todo vector se transforman conforme a las fórmulas (S7.19).

El diferencial

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\,dx^i \quad \text{(S7.20)}$$

de la magnitud escalar cuadridimensional Φ es también 4-escalar. Aquí está representado en forma del producto escalar, compuesto por operadores de diferenciación $\partial/\partial x^i$ y componentes contravariantes dx^i del 4-vector. De aquí se deduce que los operadores de diferenciación $\partial/\partial x^i$ respecto de las coordenadas x^i hay que considerarlos como componentes

covariantes del 4-vector operador. Análogamente los operadores de diferenciación $\partial/\partial x_i$ respecto de las componentes covariantes x_i del 4-radio vector, son componentes contravariantes del 4-vector operador, así que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right),\qquad \frac{\partial}{\partial x^i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right). \quad \text{(S7.21)}$$

El gradiente cuadridimensional de la magnitud 4-escalar Φ es de por sí un 4-vector

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \nabla\Phi\right). \quad \text{(S7.22)}$$

La divergencia cuadridimensional del 4-vector A^i se define por la expresión

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}. \quad \text{(S7.23)}$$

Se denomina tensor cuadridimensional (4-tensor) de segundo rango al conjunto de dieciséis magnitudes T^{ik} las cuales, al pasar de un sistema de coordenadas cuadridimensional a otro, se transforman como el producto de las componentes de un 4-radio vector

$$T^{ik}=a^i_l a^k_m T'^{lm},\qquad T'^{ik}=\bar{a}^i_l \bar{a}^k_m T^{lm}. \quad \text{(S7.24)}$$

El tensor cuadridimensional de rango elevado se define de manera semejante. Los 4-vector y 4-escalar introducidos anteriormente pueden considerarse como 4-tensores de rango primero y nulo.

Un mismo 4-tensor se puede representar mediante sus componentes contravariantes T^{ik}, las cuales se designan con supraíndices, así como mediante sus componentes covariantes con subíndices T_{ik}, o componentes mixtas $T^i{}_k$. En el último caso, el primer índice puede ser subíndice y el segundo supraíndice, lo que significa otras componentes mixtas T^k_i de dicho 4-tensor.

Análogamente a las fórmulas (S7.14), el enlace entre diferentes formas de componentes de un 4-tensor se puede establecer mediante los tensores métricos covariante y contravariante, por ejemplo,

$$T_{ik}=g_{il}g_{km}T^{lm},\quad T_{ik}=g_{kl}T_i{}^l,\quad T_i{}^k=g_{il}g^{km}T^l{}_m. \quad \text{(S7.25)}$$

Dicho de otra forma, al subir o bajar el índice temporal 0 no varía la componente del 4-tensor, mientras que la misma operación con uno de los índices espaciales, 1, 2 ó 3 cambia el signo de la componente.

Si $T^{ik} = T^{ki}$, entonces el tensor T^{ik} se denomina simétrico, mientras que en el caso $T^{ik} = -T^{ki}$, antisimétrico. Las componentes mixtas del tensor simétrico coinciden: $T^i{}_k = T_k{}^i$, por lo que éstas se escriben como T^i_k, situando los índices uno encima del otro.

En el cálculo tensorial las principales operaciones algebraicas son: suma, multiplicación y contracción.

Se denomina suma de tensores A^i_{km} y B^i_{km} al tensor C^i_{km} con componentes $C^i_{km} = A^i_{km} + B^i_{km}$. En otras palabras, al sumar tensores de igual forma y de un mismo rango las componentes homónimas se suman, además en las dos partes de cualquier igualdad tensorial tienen que hallarse los tensores con los mismos índices libres e igualmente situados.

Se denomina producto de tensores al tensor cuyas componentes son iguales a los productos de las componentes de los factores. Como resultado de la multiplicación se forma un tensor nuevo, cuyo rango es equivalente a la suma de los rangos de los tensores que se multiplican. Por ejemplo, multiplicando el tensor A^{ik} por B_{lm} se obtiene un tensor nuevo C^{ik}_{lm} con componentes $C^{ik}_{lm} = A^{ik}B_{lm}$.

Se denomina contracción (simplificación) de un tensor a la suma respecto a un par de índices, uno de los cuales es covariante y el otro contravariante. Después de la contracción se obtiene otro tensor cuyo rango es menor en dos unidades.

La suma que resulta de la contracción

$$T_i{}^i = T_0{}^0 + T_1{}^1 + T_2{}^2 + T_3{}^3 \qquad \text{(S7.26)}$$

se denomina traza del tensor T^{ik}. Es evidente que $T^i{}_i = T_i{}^i$.

Si la multiplicación y contracción se efectúan sucesivamente esta operación se denomina multiplicación escalar. Por ejemplo, como resultado de la multiplicación escalar del vector A_i por el tensor T^{ik} se forma un tensor nuevo B^k:

$$A_i T^{ik} = B^k. \qquad \text{(S7.27)}$$

El 4-tensor unitario δ_k^i se da con la expresión

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k, \\ 0 & \text{para } i \neq k. \end{cases} \qquad \text{(S7.28)}$$

Su traza es igual a cuatro, $\delta_i^i = 4$. El 4-tensor unitario δ_k^i, así como los tensores métricos g_{ik} y g^{ik}, tienen un mismo aspecto en todos los sistemas de coordenadas cuadridimensionales.

Si los tensores A^{ik} y B_{ik} satisfacen la igualdad

$$A^{il}B_{lk} = \delta_k^i, \qquad \text{(S7.29)}$$

entonces éstos se denominan inversos uno al otro. Por ejemplo, el tensor métrico covariante g_{ik} es inverso al tensor métrico contravariante g^{ik}.

Además de los tensores δ_k^i, g_{ik} y g^{ik}, existe otro 4-tensor más, el cual no varía al pasar a otro sistema de coordenadas. Este es el 4-seudotensor unitario completamente antisimétrico de cuarto rango e^{iklm}. Las componentes de éste cambian su signo al permutar dos índices cualesquiera. Por esto, difieren de cero solamente aquellas componentes cuyos índices i, k, l y m son distintos. Con esto, $e^{0123} = 1$, mientras que las demás componentes diferentes de cero son equivalentes a 1 ó —1 en función de si es par o impar el número de permutaciones las cuales conllevan la sucesión dada de números $iklm$ a la secuencia 0123. Para el tensor e_{iklm} tenemos $e_{0123} = -1$, además

$$e^{iklm}e_{iklm} = -4! = -24. \qquad \text{(S7.30)}$$

Las componentes de un 4-tensor absoluto de cuarto rango, uno de cuyos índices es temporal y los otros espaciales (o viceversa), cambian el signo al invertirlas. Sin embargo, las componentes de e^{iklm} no cambian durante la inversión ya que por definición tienen una misma forma en todos los sistemas de coordenadas. Por esto e^{iklm} es un 4-seudotensor y no un 4-tensor absoluto.

El teorema de Gauss—Ostrogradski generalizado para un espacio cuadridimensional seudoeuclidiano se escribe así

$$\oint A^i \, dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} \, d\Omega, \qquad \text{(S7.31)}$$

siendo A^i cierto 4-vector, $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ el elemento de volumen en el 4-espacio, mientras que dS_i es el 4-vector del elemento de la superficie hiperbólica cuyas componentes contravariantes son $dS^0 = dx^1\, dx^2\, dx^3$, $dS^1 = dx^0\, dx^2\, dx^3$, $dS^2 = dx^0\, dx^1\, dx^3$ y $dS^3 = dx^0\, dx^1\, dx^2$. En la parte izquierda de la igualdad (S7.31) la integración se realiza a lo largo de la superficie hiperbólica cerrada, mientras que en la derecha, respecto del 4-volumen que se encuentra en el interior de esta superficie hiperbólica.

Cada magnitud vectorial física puede ser representada, tanto mediante sus componentes contravariantes, como mediante las covariantes, según sea más cómodo. Esto mismo se refiere a las magnitudes tensoriales. En las designaciones admitidas el 4-impulso p^i, 4-vector de intensidad de la corriente j^i y 4-potencial A^i, se escriben como

$$p^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \mathbf{p}\right), \quad j^i = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A^i = (\varphi, \mathbf{A}). \tag{S7.32}$$

El sentido físico de las magnitudes que aquí se usan fue expuesto en la introducción teórica al capítulo V.

El tensor del campo electromagnético

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{S7.33}$$

tiene la forma

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{S7.34}$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{S7.35}$$

La forma covariante de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \tag{S7.36}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{S7.37}$$

El tensor de la energía-impulso del campo electromagnético

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^{k}{}_{l} + \frac{1}{4}\,g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \qquad \text{(S7.38)}$$

Este tensor es simétrico y su traza resulta nula. El sentido físico de las diversas componentes del tensor energía-impulso es evidente de la tabla siguiente:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & s_x/c & s_y/c & s_z/c \\ s_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ s_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ s_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix}. \qquad \text{(S7.39)}$$

donde w es la densidad de la energía del campo electromagnético, s el vector de Poynting y $T_{\alpha\beta}$ el tensor maxweliano de la tensión (V.38).

La ecuación de movimiento de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético exterior:

$$m_0 \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}\,F^{ih}u_h, \qquad \text{(S7.40)}$$

donde $ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mientras que $u^i = (u^0, \mathbf{u})$ es la velocidad cuadridimensional, cuyas componentes se expresan mediante la velocidad v de la partícula de la siguiente manera:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad \text{(S7.41)}$$

En caso de que la partícula cargada se mueva con una velocidad comparable con la velocidad de la luz, a la parte derecha de la ecuación de movimiento (S7.40) hay que agregar complementariamente la fuerza cuadridimensional

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\,\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}\,u_h u^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5}\,F^{il}F_{kl}u^k + \\ + \frac{2e^4}{3m^2c^5}\,(F_{kl}u^l)\,(F^{hm}u_m)\,u^i, \qquad \text{(S7.42)}$$

que tiene en cuenta el frenado por radiación. Las componentes temporal y espaciales de la 4-fuerza g^i están relacionadas

con la fuerza tridimensional **f** del frenado por radiación conforme a la fórmula

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{vf}}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \qquad \text{(S7.43)}$$

Cuando la velocidad de la partícula cargada se aproxima a la velocidad de la luz, la fuerza tridimensional del frenado por radiación toma forma de

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} \overset{\bullet\bullet}{(F_{kl}u^l)} (F^{hm}u_m)\,\mathbf{v}. \qquad \text{(S7.44)}$$

Aquí, si el eje X se orienta a lo largo de la velocidad **v** de la partícula, entonces de (S7.44) se obtiene la expresión (V.65).

BIBLIOGRAFÍA

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1973. (L. D. Landau, E. M. Lifshits, Teoría del campo).
2. J. D. Jackson, Classical electrodynamics, Wiley, 1962.
3. W. Panofsky, M. Phillips, Classical electrodynamics and magnetism, Addison Wesley, 1962.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957. (L. D. Landau, E. M. Lifshits, Electrodinámica de medios continuos).
5. I. E. Tamm, Fundamentos de la teoría de electricidad, «Mir», 1979.
6. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике, «Наука», 1970. (V. V. Batyguin, I. N. Toptyguin, Compendio de problemas sobre la electrodinámica).
7. A. N. Tíjonov, A. A. Samarski, Ecuaciones de la física matemática, Mir, 1979.
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1973. (M. A. Lavréntev, B. V. Shabat, Métodos de la teoría de variables complejas).
9. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963. (I. M. Ryzhik, I. S. Gradshteyn, Tablas de integrales, sumas, series, y productos).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, «Наука», 1974. (L. D. Landau, E. M. Lifshits, Mecánica cuántica).

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, I-110, GSP, URSS.

MIR PUBLICA

A. Tíjonov, A. Samarski

ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

El texto abarca el material clásico para ecuaciones con derivadas parciales de segundo grado. El material se suministra según el grado creciente de complejidad: en la primera parte se clasifican las ecuaciones y se examina cada tipo por separado (hiperbólico, parabólico, elíptico) en la recta y en el plano. La segunda parte es un estudio ulterior de los citados tres tipos en el espacio y contiene, además, dos complementos: el método de las diferencias finitas y las funciones especiales, que son muy valiosos para aplicaciones prácticas. Antes de pasar a axponer la teoría sobre los tres tipos de ecuaciones, se tratan problemas de física que nos llevan a ellas. Cada capítulo contiene también varios apéndices donde se analizan los más diversos problemas de la física teórica aplicando las correspondientes ecuaciones (sobre la dinámica de los gases, temperatura de la corteza terrestre, cambios de fase, sobre electromagnética, guías de onda, etc.).

En el libro se analiza minuciosamente y para todos los tipos de ecuaciones en grado creciente de generalidad, el método fundamental aplicando para resolver ecuaciones de la física matemática: método de separación de variables, o de Fourier. Los innumerables ejemplos de su empleo constituyen un material valioso para el estudiante y son de gran utilidad para el profesional.

L. Landau, E. Lifshitz

CURSO ABREVIADO DE FISICA TEORICA

Esta obra ha sido concebida como un curso que debe incluir un volumen mínimo de conocimientos teóricos indispensables a todo físico moderno, cualquiera que sea la especialidad a que se dedique. Su propósito es hacer llegar al lector el espíritu y las ideas pedagógicas del académico L. Landau, su tendencia a la claridad, a «hacer fácil lo que es difícil, a poner de manifiesto en su verdadera sencillez la belleza de las leyes de la naturaleza». Se recomienda a estudiantes universitarios y a todos los que se interesen por los problemas teóricos de la Física moderna.

El curso consta de dos libros. En el primero «Mecánica y electrodinámica», se recogen los siguientes temas principales: Ecuaciones del movimiento, Leyes de la conservación, Integraciones de las ecuaciones del movimiento, Choques de partículas, Oscilaciones pequeñas, Principio de la relatividad, Movimiento del sólido, Ecuaciones canónicas, Carga de un campo electromagnético, Ondas electromagnéticas y Radiación de ondas electromagnéticas. En el libro segundo «Mecánica cuántica», la primera parte se dedica a la teoría cuántica no relativista, la segunda — a la teoría cuántica relativista. Por lo que respecta a la primera, en ella casi no se emplea la frase «puede demostrarse»: los resultados que se insertan van acompañados de las correspondientes deducciones. Esto se refiere en menor grado a la parte segunda, donde sólo se dan los fundamentos de la electrodinámica cuántica. Sus autores también aquí se han afanado por estructurar las explicaciones de tal modo que, dentro de lo posible, se manifieste claramente las condiciones físicas y la estructura lógica de la teoría. Pero debido a lo complejo de los cálculos con los que está relacionada, por lo general, la resolución de los problemas concretos en esta rama, una serie de aplicaciones de la teoría se dan a conocer únicamente por sus resultados. El último capítulo se dedica a los diagramas de Feynman y brinda al lector una noción sobre el origen y el sentido de las ideas de la llamada «técnica de diagramas», que han arraigado profundamente en el formalismo moderno de la Física teórica.

A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makárenko

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Sus autores son candidatos a doctores en Ciencias Fisicomatemáticas.

En esta obra se han recopilado cerca de 1 000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. También se han incluido el método de isoclinas para las ecuaciones de primer y segundo orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales dependencias e independencias lineales de los sistemas de funciones. Además contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño, el método para resolver ecuaciones y los sistemas.

Cada parágrafo empieza con una breve introducción teórica. Después se exponen las determinaciones y métodos principales para solucionar los problemas. Todos los problemas van acompañados de sus resultados; para algunos de ellos figuran indicaciones sobre cómo resolverlos.

Es un libro de texto para estudiantes en centros de enseñanza superior.

A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makárenko

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Sus autores son candidatos a doctores en Ciencias Fisicomatemáticas.

En esta obra se han recopilado cerca de 1 000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. También se han incluido el método de isoclinas para las ecuaciones de primer y segundo orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales dependencias e independencias lineales de los sistemas de funciones. Además contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño, el método para resolver ecuaciones y los sistemas.

Cada parágrafo empieza con una breve introducción teórica. Después se exponen las determinaciones y métodos principales para solucionar los problemas. Todos los problemas van acompañados de sus resultados; para algunos de ellos figuran indicaciones sobre cómo resolverlos.

Es un libro de texto para estudiantes en centros de enseñanza superior.